Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук

№ 2

КУРСК
2009

УДК 1: 001
ББК 87
П78

Курский государственный
университет

П78

Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук № 2 – Курск. гос. ун-т. – Курск, 2009. – 160 с.

ISSN 2074–5052

Сборник представляет собой проблемно-ориентированное издание, преимущественно посвященное онтологическим и гносеологическим аспектам обоснования математических и естественных наук, изучению и критической реконструкции различных подходов, сформировавшихся в философии науки на протяжении последних полутора столетий.

ББК 87

Адрес редакции:
Курский государственный университет,
кафедра философии
305000, Курск, ул. Радищева, д. 33
Факс: 8 (4712) 56-84-61
Email: arepiev@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Настоящий сборник представляет собой второй выпуск проблемно-ориентированного издания, преимущественно посвященного онтологическим и гносеологическим аспектам обоснования математических и естественных наук, изучению и критической реконструкции различных подходов, сформировавшихся в философии науки на протяжении последних полутора столетий.

Авторы публикуемых в настоящем издании материалов могут занимать позиции, не совпадающие с точкой зрения редколлегии. Ответственность за точность приводимых цитат, ссылок, библиографических и статистических данных, географических названий и т.п. сведений несут авторы.

Редколлегия сборника приглашает к сотрудничеству всех, кто работает в области философии математики, философии и методологии науки, в смежных областях и чьи научные интересы близки тематике нашего сборника.

Наш электронный адрес: arepiev@yandex.ru

Д.И. Алябьев
(Курск)

О ТЕОРЕТИКО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОМ И ОНТОЛОГИЧЕСКОМ СТАТУСЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ АРИФМЕТИКИ В ПРОГРАММЕ Д. ГИЛЬБЕРТА[·]

Статья посвящена выявлению онтологических и теоретико-познавательных установок формализма в содержательной интерпретации исходных арифметических понятий и истин Д. Гильбертом. Исследуется вопрос о правомерности истолкования формалистской позиции как версии, редуцирующей арифметическую компоненту математики к логической.

Как справедливо отмечается современными исследователями, обоснование науки вообще и математики в частности необходимо для приближения имеющихся практических результатов к идеалу, строящемуся на основании ее назначения[1]. То есть обоснование математики имеет большое значение и входит в число первостепенных задач философии науки. Эта задача осложняется тем, что, с одной стороны, все объекты математики и ее понятия являются идеальными построениями и экспериментально не обнаруживаются. С другой стороны, прикладные науки, использующие математический аппарат, получают неизменно положительные результаты, подтверждая истины математики практикой. В результате математические понятия имеют особое положение в отношении их онтологического и теоретико-познавательного фундамента, выявление которого выступает важной, необходимой задачей как для философии математики, так и для самой математики.

В настоящее время одна из наиболее влиятельных программ обоснования математики, – формалистская программа Гильберта, – является достаточно хорошо исследованной в трудах отечественных и зарубежных авторов. Несмотря на это, по нашему мнению, на данный момент затруднительно однозначно интерпретировать позицию формализма об отношении исходных математических истин и объектов к действительности и процессу познания. Это, в частности, относится и к базисным понятиям арифметической составляющей данной науки. Одним из наиболее важных вопросов, не имеющих исчерпывающего решения, является также выявление различия между онто-гносеологическими установками логицистского и формалистского обоснования математики. Таким образом, исследование сущностных оснований арифметической составляющей формалистской концепции математики может в перспективе привести к результатам, дополняющим традиционные представления о формализме.

[·] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00049а.
[1] См.: Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – С. 10

Формальное истолкование математики, которое связано с получением абстрактных конструкций на основе предварительно заданных правил (аксиом), на первый взгляд, можно ассоциировать с игрой, которая происходит по регламентированным правилам. Но, как показывает практика, такое предположение является маловероятным и не описывает истинного отношения математического знания к действительности. В качестве примера можно привести высказывание Н. Бурбаки: «Если бы формализованная математика была так же проста, как игра в шахматы, то, составив описание выбранного нами формализованного языка, мы должны были бы затем лишь излагать наши доказательства на этом языке, подобно тому как автор шахматного трактата записывает в своей нотации партии, которым он хочет научить, сопровождая их в случае необходимости комментариями» [2].

По мнению В.Я. Перминова современная философия математики должна быть объединением положений об идеальности, формальности, априорности и реальности математических структур. В этом случае формальность должна заключаться в понимании математики в виде мысленных конструкций, ограниченных требованием непротиворечивости. Априорность же должна относиться к образованию исходных понятий арифметики и элементарной геометрии. Реальность данных представлений связывается с «универсальной онтологией, лежащей в основе человеческого мышления»[3]. По словам В.Я. Перминова, при выявлении места математики в системе наук наиболее приемлемой является формалистская концепция, согласно которой математическое знание не имеет своего предмета, а является совокупностью логических структур, описывающих всевозможные свойства реальных связей[4]. Получается, что в основаниях математического знания находятся законы логики. Это, однако, исходя из ряда высказываний основателя формалистского течения Д. Гильберта, не является однозначным фактом.

В связи со сложностью конструкций формализованного языка, для упрощения им вводится сжатый язык, сопровождающийся «рассуждениями» особого типа. Такой язык относится к метаматематике, которая является полной абстракцией от значений, первоначально приписываемым словам или фразам формализованных математических текстов. В ней (метаматематике) они рассматриваются в виде особых простых объектов, являющихся конструкциями заранее заданными, для которых значение имеет только порядок расположения. Таким образом, абсолютная абстрактность относится только к конструкциям метаматематики, объекты которой, в свою очередь, конструируются из других объектов. Тем самым получается не абсолютным утверждение о всей формальной математике, как о лишенной смысла. В частности, это относится к основополагающим объектам

---

[2] Подробнее см.: Н. Бурбаки. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – С. 26–28.
[3] См.: Перминов В.Я. Философия и основания математики. – С. 8.
[4] См.: Там же. – С. 7.

оснований математики и ее составляющей части – арифметики. Такую точку зрения можно подчеркнуть словами Н. Бурбаки: «…формализованная математика не может быть записана вся полностью, и потому, в конце концов, приходится питать доверие к тому, что можно назвать здравым смыслом математика, – доверие, аналогичное тому, которое бухгалтер и инженер, не подозревая о существовании аксиом Пеано, питают к формуле или численной таблице и которое, в конечном счете, основано на том, что оно никогда не было подорвано фактами»[5].

Одним из наиболее важных понятий арифметики является понятие числа, и, в частности, натуральных и целых чисел. Гильберт в основном разделяет идеи Г. Фреге о их природе. Фреге ставил задачу обоснования законов арифметики средствами логики[6]. Но несмотря на это однозначного мнения о понятиях арифметики как о производных от законов логики у Гильберта нет. Наоборот он выделяет арифметические понятия в категорию фундаментальных и ставит их наравне с законами логики в основании математического знания: «Обычно характеризуют арифметику как часть логики и при обосновании арифметики чаще всего предполагают традиционные основные понятия логики известными. Однако, присматриваясь более внимательно, мы замечаем, что при обычном изложении законов логики применяются уже некоторые основные понятия арифметики, например понятие множества, отчасти понятие числа, особенно в смысле количества. Мы попадаем, таким образом, в порочный круг, а потому для избегания парадоксов необходимо в некоторой части одновременное развитие и законов логики, и законов арифметики»[7].

При построении элементарной арифметики Гильберт говорит о ней как о теории цифр, которые являются фигурами некоторого простого вида. О связи чисел натурального ряда Гильберт говорит следующее: «Характер этой связи таков. Пусть нам дана какая-нибудь конкретная (и, значит, конечная) совокупность объектов. Предположим, что мы перебираем друг за другом объекты этой совокупности и приписываем им по порядку в качестве номеров цифры 1, 11, 111. Когда все эти объекты будут исчерпаны, мы дойдем до некоторой вполне определенной цифры n. Учитывая характер ее происхождения, естественно назвать эту цифру порядковым числом указанной совокупности при заданном способе перечисления»[8]. В большинстве высказываний Гильберт придерживается идеи главенства порядковой характеристики в формалистской концепции арифметики. Но в работе «Об основаниях логики и арифметики» обнаруживается противоречие такого подхода и выделяется важность количественной характеристики числа, которую, по его мнению, невозможно выразить посредством зако-

[5] См.: Н. Бурбаки. Теория множеств. – С. 27–28.
[6] См.: Гильберт Д. Об основаниях логики и арифметики // Гильберт Д. Избранные труды. Т. I. – М.: Факториал, 1998. – С. 399–400.
[7] См.: Там же. – С. 400.
[8] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – М.: Наука, 1982. – С. 55.

нов логики[9]. В связи с тем, что сами числа, по его словам, выступают абстрактными конструкциями, их гносеологическое значение определяется связью между цифрами и понятием количества. То есть, несмотря на абстрактность понятия числа в формалистском истолковании арифметики, важное значение чисел заключается именно в их связи с реальными процессами действительности, выражающимися в количественных характеристиках.

Основное понятие арифметики, такое как число, и его визуальная интерпретация в виде цифры однозначного внешнего вида в формалистской арифметике не имеют. О внешнем виде цифр Гильберт говорит: «Важным является лишь то, что как сама цифра 1, так и результат операции приписывания этой цифры представляют собой некоторые интуитивно ясные (наглядные) объекты, которые можно опознавать однозначным образом, и что у каждой цифры мы всегда можем проанализировать те дискретные части, из которых она составлена»[10]. Основу изложения арифметических оснований Гильберт начинает с понятия объекта мышления, называемого им «мыслимой вещью» и обозначаемого специальным символом. В качестве такого символа выбирается 1 (единица). Конструкции, получаемые с использованием этой вещи, называют комбинацией вещи 1 с самой собою, например: 11, 111, 1111, и т. д. Таким образом, числовой ряд в интерпретации формализма начинается с единицы, а не с нуля. Затем Гильберт присоединяет другую простую мыслимую вещь, обозначая ее символом = (равно). Можно, говорит он, создавать комбинации этих двух мыслимых вещей, например: 1 =, 11 =... (1) (= 1)(= = =), и т. д. Можно, по-видимому, сказать, что на этом этапе Гильберт говорит о «придумывании» реально не существующих объектов. Затем он делит построенные объекты на два класса: классы существующих и несуществующих конструкций. На этом этапе, по сути, происходит разделение Гильбертом получаемых конструкций на «реальные», то есть имеющие определенное отношение к действительности, и «нереальные»[11].

При построении конечных последовательностей формальных символов можно получать различного рода формальные выражения. Строятся они на основе алфавита формальных символов. Роль формальных выражений является аналогом слов обычного языка со структурной точки зрения. О таких выражения Клини говорит: «Большинство формальных выражений, вроде, скажем,))a0, = или aaa, не будут представлять для нас никакого интереса»[12]. Таким образом, для бессодержательных построений получаемые конструкции имеют неравнозначный статус, хотя построены, по сути, по аналогичным законам. Тем самым выявляется необходимость критерия,

[9] См.: Гильберт Д. Об основаниях логики и арифметики. – С. 400.
[10] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – С. 46.
[11] См.: Гильберт Д. Об основаниях логики и арифметики. – С. 400–401.
[12] См.: Клини С.К. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – С. 243.

по которому должен происходить отбор «интересных» для математики конструкций.

Кроме исходных объектов арифметики, Гильберт говорит об операции порождения. В качестве операции порождения Гильберт предлагает операцию приписывания единицы. Выделение ее в качестве первого элемента числового ряда можно обнаружить из следующей фразы: «Объекты, которые мы получим, отправляясь от цифры 1, в результате применения упомянутой операции порождения, такие, например, как 1, 11, 1111, представляют собой фигуры следующего вида: они начинаются и оканчиваются цифрой 1; после каждой цифры 1, не являющейся концом данной фигуры, идет следующая за ней 1»[13]. По сути, полученные числовые знаки вида 1, 11, 111, 11111... ничего не обозначают, а характеризуются только тем, что за 1 снова следует 1. Но, кроме этих знаков, в элементарной арифметике используются еще и другие знаки, обозначающие нечто и служащие для сообщения. Так 2 служит для сокращенной записи числового знака 11 и так далее[14].

Как было сказано выше, натуральный числовой ряд у Гильберта начинается с единицы. Отсюда получается, что число ноль выпадает из этого ряда, или, по крайней мере, из перечня исходных и значимых в сущностном плане объектов. Но формалисты не ставят задачу построения арифметики без 0. В формальной арифметике его вводят в качестве индивидного символа 0, являющегося своеобразной фикцией[15]. Этот знак был введен в качестве дополнения к числам и служил для обозначения полинома 1 – 1[16]. Это подчеркивает особое отношение к числу ноль в формальной арифметике: ноль не относится к основным объектам (не равен по значимости другим числам), а используется в качестве специального символа. Таким образом, не внося ноль в натуральный числовой ряд, Гильберт, тем не менее, осознавал его необходимость при построении математики и выбрал способ, согласующийся с его теорией и не противоречащий построению натурального ряда, ведущего отсчет от 1.

Понятие чисел в формальной арифметике в онтологическом смысле является размытым. Но, скорее всего, Гильберт представляет их априорно заданными. В подтверждение этому можно привести следующую фразу: «Характерной особенностью этой точки зрения является то, что рассуждения здесь рассматриваются как мысленные эксперименты над предметами, которые предполагаются конкретно заданными. Так, в арифметике речь идет о числах, которые мыслятся как заданные»[17]. При описании формалистской философии математики В. Я. Перминов говорит об элементах априоризма, лежащих в ее основе. «”Школьная математика” Гильберта, на

[13] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – С. 46.
[14] См.: Гильберт Д. О бесконечном // Гильберт Д. Избранные труды. Т. I. – М.: Факториал, 1998. – С. 440.
[15] См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. II. – М.: Наука, 1982. – С. 546.
[16] См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – С. 57.
[17] См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – С. 45.

основе которой он хотел дать абсолютное обоснование непротиворечивости всех математических рассуждений, представляет собой не что иное как такого рода априорное знание, абсолютное и не подверженное эмпирической критике. Так же как и интуиционисты, Гильберт надеялся обосновать математику на априорных началах, придав им, однако, более строгое, собственно математическое определение»[18].

Одной из особенностей построения натурального числового ряда в формальной арифметике является также отрицание того, что его бесконечность является актуально данной. Таким образом Гильберт говорит о натуральном ряде, как о потенциально бесконечном. Эту точку зрения можно обнаружить в следующем высказывании Гильберта: «Наш общий вывод таков: в реализованном виде бесконечное не встречается нигде. Его нет в природе, и оно также недопустимо и в качестве основы нашего разумного мышления, – достойный внимания пример гармонии между бытием и мышлением. В противоположность предшествующим стремлениям Фреге и Дедекинда, мы пришли к убеждению, что как предварительное условие для возможности научного познания необходимы некоторые наглядные представления и благоразумие и что одной только логики для этого недостаточно. Оперирование с бесконечным может быть сделано надежным только через конечное»[19].

Когда Гильберт говорит об основаниях математики, в частности об арифметической составляющей, его точка зрения является нечеткой в определении того, какая из компонент математического знания является основополагающей. С одной стороны, он утверждает равнозначность арифметической и логической составляющих, что ярко выражается следующей фразой Гильберта: «Обычно характеризуют арифметику как часть логики и при обосновании арифметики чаще всего предполагают традиционные основные понятия логики известными. Однако, присматриваясь более внимательно, мы замечаем, что при обычном изложении законов логики применяются уже некоторые основные понятия арифметики, например, понятие множества, отчасти понятие числа, особенно в смысле количества»[20]. С другой стороны, когда он говорит о доказательстве непротиворечивости, то в своих утверждениях начинает себе противоречить и сводить основания математики, по сути, к логическим основаниям: «Лишь в двух случаях, а именно когда речь идет об аксиомах самих целых чисел и обосновании теории множеств, этот прием, состоящий в сведении к другой, более узкой области знания, становится явно неприменимым, ибо помимо логики нет уже ни одной дисциплины, которую при этом можно было бы привлечь. Но поскольку доказательство непротиворечивости – вещь совершенно обязательная, представляется необходимым аксиоматизиро-

---

[18] См.: Перминов В.Я. Философия и основания математики. – С. 8.
[19] См.: Гильберт Д. О бесконечном. – С. 448.
[20] См.: Гильберт Д. Об основаниях логики и арифметики. – С. 400.

вать саму логику и показать, что теория чисел, равно как и теория множеств, составляют лишь части логики»[21].

Важность теоретико-познавательных оснований в математическом знании подчеркивается не только философами, но и самим Гильбертом. Об этом он упоминает в разговоре о непротиворечивости теории целых чисел и теории множеств[22]. При построении финитной арифметики конструированием чисел Гильберт прибегает к использованию содержательных, наглядных соображений. Здесь, в некотором смысле, возникает путаница, связанная с характером образования основных понятий такой арифметики. С одной стороны, идеи формальной математики, высказывавшиеся еще Грассманом и активно развивающиеся школой Гильберта, говорят о ней как о бессодержательной, объекты которой являются абстрактными конструкциями[23]. С другой стороны, при построении основополагающих объектов арифметики упоминается о содержательных наглядных соображениях при конструировании самого главного понятия арифметики – числа[24]. В связи с этим онтологическое происхождение числа выражено неоднозначно. В работах по основаниям арифметики, которые Гильберт начал примерно в то же время, что и работы по основаниям геометрии, положено в качестве основы понятие числа. Оно задается при помощи аксиоматического метода. В качестве начала натурального ряда Гильберт берет число 1. Остальные числа получаются по закону порождения, в качестве которого он выбирает операцию прибавления 1. Таким образом, происходит образование натурального ряда вида 1, 2, 3, 4... Аналогичным прибавлению является обратная операция – вычитание 1. То есть в формальной арифметике задаются и отрицательные числа[25].

Попытки аксиоматического построения арифметики появились до Гильберта. Еще в 1888 Дедекинд сформулировал схожую систему аксиом, которую тремя годами позже воспроизвел Пеано. Эта система содержала точную формулировку принципа индукции. Такой принцип употреблялся до этого Грассманом, но явно им не формулировался[26]. Хотя система аксиом Гильберта и построена на основании аксиом Пеано, Гильберт перерабатывает их и вносит определенные изменения. К ним, например, относится указание, что коммутативный закон умножения можно получить на основании других аксиом[27].

[21] См.: Гильберт Д. Аксиоматическое мышление // Гильберт Д. Избранные труды. Т. I. – М.: Факториал, 1998. – С. 414.
[22] См.: Гильберт Д. Аксиоматическое мышление. – С. 415.
[23] См.: Перминов В. Я. Философия и основания математики. – С. 7.
[24] См.: Гильберт Д. О бесконечном. – С. 440.
[25] Paul Bernays. Huberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. // D. Hilbert. Gesammelte abhandlungen. Band III. – Berlin.: Verlag von Julius springer. 1935. – P. 192.
[26] Подробнее см.: Н. Бурбаки. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – С. 325.
[27] Paul Bernays. Huberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik // D. Hilbert. Gesammelte abhandlungen. Band III. – Berlin.: Verlag von Julius springer. 1935. – P. 193.

Итак, в качестве предпосылок и основы аксиоматического построения арифметики Гильберта выступают работы Дедекинда и Пеано. При рассмотрении системы аксиом Пеано[28] можно обнаружить важный факт, состоящий в том, что натуральный ряд Пеано начинается с 0. Эта особенность, связанная с принятием числа ноль в качестве основополагающего элемента, является кардинальным отличием от построений Гильберта, у которого натуральный ряд начинается с единицы. У Гильберта ноль имеет особый статус, выделяющий его из ряда чисел, хотя Гильбертом признается его необходимость для построения оснований математики, и он определяет ноль как обозначение разности 1 – 1. Из этого следует, что 0 в интерпретации Гильберта – это конструкция, получаемая при помощи фундаментальных понятий арифметики, таких как единица, а также операции порождения (точнее операции, обратной операции порождения).

В формалистской арифметике основное место занимают целые числа, которые находятся в основании при образовании других видов чисел. «Для построения, скажем, теории чисел достаточно законов, которым подчиняются арифметические действия над целыми числами»[29]. У Гильберта понятие чисел при построении арифметики является чисто арифметическим и не сводится, например, к построению на основе логических законов, хотя при построении различных выводов и теорем арифметики происходит, конечно же, обращение к законам логики. В то же время понятие бесконечности, с которым мы сталкиваемся при определении натурального ряда, является специфическим понятием не только арифметики, но и математики в целом. По поводу этого понятия Гильберт говорит следующее: «окончательное раскрытие сущности бесконечного далеко выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того, оно стало необходимым для чести самого человеческого разума»[30].

Хотя принято считать, что теорема К. Геделя о неполноте показала невозможность доказательства непротиворечивости формальной арифметики в том виде и теми методами, как это предполагал осуществить Д. Гильберт, можно отметить, что полностью его идею эти результаты не опровергли. Г. Генцен в работе «Непротиворечивость чистой теории чисел» описывает формализацию «натурального» типа для арифметики и дает доказательство ее непротиворечивости. Для этого доказательства им был использован метод распространения доказательства теоремы об устранимости «сечения» на логико-математические исчисления. Благодаря этому методу Г. Генцен построил свое доказательство непротиворечивости арифметики[31].

---

[28] Перечень аксиом см.: Клини С. Введение в метаматематику. – М.: Изд. иностранной литературы, 1957. – С. 26.
[29] См.: Гильберт Д. Аксиоматическое мышление. – С. 410-411.
[30] См.: Гильберт Д. О бесконечном. – С. 433.
[31] См.: Идельсон А.В., Минц Г.Е. Математическая теория логического вывода. – М.: Наука, 1967. – С. 6.

Таким образом, в отношении основных арифметических понятий и объектов у Д. Гильберта можно отметить ряд важных положений. В качестве фундаментального у него выступает понятие единицы, как основание арифметического ряда и исходное понятие самой арифметики. Вместе с ним вводится другое базисное понятие «мыслимой вещи», изображаемой символом «=». Особое место также отводится закону порождения следующих за единицей чисел. Этим законом Гильберт называет операцию приписывания новой единицы к имеющейся конструкции из единиц (вводится и обратная операция вычитания одной единицы из имеющейся конструкции). Ноль к базисным и онтологически значимым понятиям у Гильберта не относится, поскольку он строится на основе понятия единицы и закона порождения. Получается натуральный ряд, начинающийся с единицы. Как уже отмечалось, можно предположить, что фундаментальные понятия арифметики Гильберт трактует как идеальные, но реально существующие, объективные. В частности, о связи арифметики с действительностью Гильберт говорит следующее «Мы построили ее (арифметику – прим. авт.) как теорию цифр, т. е. фигур некоторого простого вида. Гносеологическое значение этой теории определяется той связью, которая существует между цифрами и собственно понятием количества»[32]. Что же касается понятия количества, то к нему традиционно обращаются многие разработчики оснований математики (Дедекинд, Кантор, Фреге и др.), и оно, в наиболее распространенном понимании, подразумевает объективное свойство действительности. Следует также отметить, что Гильберт фактически признает наличие двух равнозначных компонент содержательных основ математики – арифметической и логической, что в определенном смысле противоречит общепринятым представлениям о позиции формализма.

Таким образом, вышеперечисленное указывает на необходимость дальнейшего обстоятельного осмысления того, чем же является в онтологическом и гносеологическом плане арифметика, выступающая одной из составных частей математики, а также того, какова природа ее содержательной и формальной составляющих, необходимость осмысления того, как может интерпретироваться отношение каждой из этих составляющих к действительности и процессу познания не только с точки зрения формализма, но и других программ.

---

[32] См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. I. – С. 55.

Е.И. Арепьев
(Курск)

ОНТО-ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МАТЕМАТИКИ В КОНЦЕПЦИЯХ ЛОГИЦИЗМА И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ: РЕАЛИСТИЧЕСКАЯ ТЕНДЕНЦИЯ[·]

Статья посвящена рассмотрению проблемы онтологических и гносеологических оснований арифметической составляющей математического знания в концепциях представителей логицизма и аналитической философии. В статье выявляются элементы реалистического истолкования проблемы в указанных направлениях, обосновывается тезис об адекватности данных представлений и необходимости их развития.

Многие концепции философии математики и программы оснований этой науки содержат установку о том, что базисом математического знания выступает арифметика натуральных чисел. Не разделяя эту установку в полной мере, мы, тем не менее, считаем арифметическую составляющую неотъемлемой частью сущностного фундамента математики[1]. Современные исследования проблем философии математики с необходимостью подразумевают осмысление и использование огромного багажа, накопленного в этой области в конце XIX и XX веках. В связи с этим представляет значительный интерес вопрос о том, как трактуются исходные арифметические понятия в таком влиятельном течении философии математики, которое представлено концепциями логицизма и аналитической философии.

В трудах Г. Фреге осуществляется развернутое исследование сущностных основ арифметики. Этот мыслитель указывает, что решение о природе арифметических законов зависит от того, как будут определены натуральные числа, или же они будут признаны за неопределяемые[2]. Предвосхищая, а, вернее, предопределяя идеи аналитической философии, Фреге предлагает контекстуальный лингвистический анализ понятия числа. Он говорит, что указание на число содержит высказывание о понятии: «Более всего это, пожалуй, ясно относительно числа 0. Если я говорю: “Венера имеет 0 лун”, то здесь вовсе нет луны или агломерата лун, о которых можно было бы нечто высказать; однако благодаря этому *понятию* “луна Венеры” прилагается свойство, а именно, под него ничего не подпадает. Если я говорю: “Карету кайзера везут четыре лошади”, то понятию “лошадь, ве-

---

[·] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00049а.

[1] Об см.: Арепьев Е.И. О сущностном фундаменте математики и ее арифметической составляющей // Философская Россия 1/2006. – М.: Изд-во РУДН, 2006. – С. 99–108.

[2] Фреге Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование понятия числа. – Томск: Водолей, 2000. – С. 28.

зущая карету кайзера” я прилагаю число четыре»[3]. Указание на число, по мнению Фреге, выражает нечто объективное аналогично указанию физических свойств объекта. Он аргументирует идею, что понятие есть нечто объективное (в отличие от представления) и что, следовательно, высказывание о понятии может содержать нечто фактическое[4]. Причем свойства понятий следует отличать от свойств вещей, подпадающих под эти понятия.

Фреге указывает, что число нельзя представить как некий предмет, или же как свойство внешней вещи, оно не является чем-то чувственным. Он пишет: «Но где находится число 4? Его нет ни вне нас, ни в нас… Определение местонахождения числа 4 не имеет смысла; но отсюда вытекает только то, что оно не является пространственным предметом, а не то, что его вообще нет. Не каждый предмет находится где-то… как возможно, чтобы объективное число 4 нигде не находилось? Итак, я утверждаю, что в этом вовсе нет противоречия. Оно действительно в точности одно и то же для каждого, кто имеет с ним дело; но это не связано с пространственностью. Не каждый объективный предмет обладает местом»[5]. Фактически, здесь утверждается объективность, реальность таких математических объектов как натуральные числа, утверждается их включенность в структуру действительности.

Для строгого определения натуральных чисел Фреге, как известно, вводит определение равночисленности понятий. Понятия равночисленны, если между подпадающими под эти понятия вещами можно обнаружить взаимнооднозначное соответствие. В качестве предварительного определение вводится также определение числа, соответствующего некоторому понятию: «Число, соответствующее понятию F, есть объем понятия “равночисленно понятию F”»[6]. В итоге, число вообще, как одно из ключевых понятий арифметики, определяется у Фреге следующим образом. Он говорит, что выражение «n есть число» равнозначно выражению «существует понятие такое, что n есть соответствующее ему число»[7]. Таким образом, натуральное число представляет собой, по мнению Фреге, множество понятий (множеств, классов), объемы которых взаимнооднозначно сопоставимы, то есть множество всех равноэлементных классов. Это подтверждается его определениями конкретных чисел – нуля, единицы и др.

Ноль определяется Фреге как число, соответствующее понятию «неравное себе», или любому другому понятию, под которое ничего не подпадает[8]. Он также дает определение отношения, в котором находятся друг к другу два смежных члена натурального ряда. Фреге говорит, что если по-

[3] Там же. – С. 75.
[4] Там же. – С. 76–77.
[5] Там же. – С. 86.
[6] Там же. – С. 92.
[7] Там же. – С. 97.
[8] См.: Там же. – С. 98–99.

нятие F и подпадающий под него элемент x существуют так, что n – это число, соответствующее данному понятию, а m – число, соответствующее другому понятию: «подпадающий под понятие F, но не равный x», то это означает, что число n в натуральном ряду следует непосредственно за числом m[9].

Определив 0 и процедуру следования в натуральном ряду, Фреге говорит, что для определения единицы необходимо показать, что в натуральном ряду существует нечто, следующее непосредственно за нулем. Он рассматривает понятие «равно 0», под которое подпадает 0, и понятие «равно 0, но не равно 0». Под это второе понятие ничего не подпадает. Таким образом, Фреге определяет, что число, соответствующее первому понятию («равно 0»), есть число 1. Тогда число, соответствующее второму понятию, есть число 0, и, по приведенному ранее определению, число 1 непосредственно следует в натуральном ряду за числом 0[10]. Далее Фреге демонстрирует возможность выведения из приведенных определений некоторых свойств натурального ряда чисел.

В приводимых Фреге определениях конкретных чисел есть доля противоречивости. По существу, он определяет числа, например 2, как бесконечное (и даже несчетное) множество двухэлементных множеств, число 4, как бесконечное множество четырехэлементных множеств, число 0, как бесконечное (счетное?) множество пустых множеств, служащих объемами разных понятий: «неравное себе», «круглый квадрат», «треугольный шар» и пр. А вот с определением единицы вопрос встает несколько иначе. Можно сказать, что понятие «равное 0» имеет бесконечный объем, так как под него подпадает бесконечное несчетное множество выражений типа «5 - 5», «3 - 3» и т.п. Даже если считать числа еще не определенными, то их все равно необходимо определять, и объем понятия «равное 0» получается бесконечным. Тогда понятию «равное 0» будут равночисленны понятия бесконечного (несчетного) объема. В итоге получается, что единица определяется Фреге не по аналогии с другими числами (0, 2,3,4…), то есть не как бесконечное (несчетное) множество одноэлементных множеств, а как бесконечное множество множеств, имеющих бесконечный несчетный объем. В такой интерпретации фрегевское определение единицы можно назвать сомнительным. Если же считать, что под понятие «равное 0» подпадает единственный предмет, то можно подобрать равночисленные понятия так, чтобы их смысл не вызывал сомнений, например, «равное Платону», «равное Сократу», а можно и так, чтобы это опять выглядело сомнительным: «равное 4», «равное 5», «равное 6» и т.п. Ведь если полагать единственным предмет, подпадающий под понятие «равное 0», то под понятия «равное 4», «равное 8» и т.п. также подпадают единственные предметы, что с математической точки зрения опять же сомнительно.

---

[9] См.: Там же. – С. 100.
[10] Там же. – С. 101.

Фреге справедливо отмечает объективность и неизменность, вечность исходных арифметических истин и объектов: «Теоремы арифметики, – пишет он, – никогда не относятся к символам, – они относятся к тому, что представлено символами… …Числа не подвержены изменениям, ибо теоремы арифметики охватывают вечные истины. Стало быть, мы можем сказать, что эти объекты находятся вне времени, а из этого следует, что они не являются субъективными представлениями или идеями, поскольку последние непрерывно изменяются в соответствии с психологическими законами. Арифметические законы не образуют часть психологии»[11]. В то же время определения натуральных чисел, начиная, по крайней мере, с двойки, в его варианте предполагают также некоторую динамичность, нестатичность этих понятий. Так, если число 2 есть класс всех пар, или двухэлементных множеств, то создание новой пары, например супружеской, расширяет это множество пар, хотя и не изменяет (в силу бесконечности) его мощность.

Было бы неверным, на наш взгляд, считать описанные выше недочеты абсолютно разрушительными для фрегевской интерпретации чисел и арифметической составляющей основ математики. Их, вероятно, можно расценивать и как технические погрешности (здесь мы не будем углубляться в этот вопрос). Тем не менее, в сочетании с другими аргументами (противоречивость теоретико-множественного подхода, результаты К. Геделя, различие арифметической и логической интуиций) они свидетельствуют о невозможности полного сведения арифметики к логике, то есть о признанном практически всеми факте нереализуемости программы Фреге (и программы логицизма) в полном объеме.

Фреге утверждает не только сводимость арифметики к логике. Он говорит, что хотел показать в своей работе аналитичность, априорность арифметических законов. Для Фреге априорность как раз и означает сводимость к логике[12]. Как известно, программу полного сведения арифметики (и всей математики) не удалось реализовать. Более того, вполне аргументированной и общепризнанной является точка зрения, что такое сведение невозможно. Действительно, несмотря на наличие тесной взаимосвязи, арифметическая, логическая и геометрическая составляющие математического знания в бытийном и теоретико-познавательном отношении не идентичны, они обладают собственными сущностными особенностями, раскрытие которых способно значительно продвинуть философское обоснование математики[13].

---

[11] Фреге Г. Целое число // Философия науки – № 2 (21). – 2004. – С. 100. (приводится по электронному изданию http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/2_04/07_frege.htm)

[12] Фреге Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование понятия числа. – С. 109.

[13] Об этом, например см.: Арепьев Е.И. О сущностном фундаменте математики и ее арифметической составляющей // Философская Россия 1/2006. – М.: Изд-во РУДН, 2006. – С. 99–108.

Сейчас, по-видимому, достаточно ясным является и то, что несводимость к логике не обязательно должна отрицать априорную сущность исходных понятий и принципов арифметики. Именно такое разграничение позволит наиболее полно оценить позитивную составляющую результатов Фреге: арифметические законы действительно априорны и объективны, реальны, но они не сводятся к логике! «Законы чисел, – пишет Фреге, – не нуждаются в испытании практикой; ибо во внешнем мире, в совокупности пространственного нет понятий, нет свойств понятий, нет чисел. Стало быть, законы чисел собственно не применимы к внешним вещам; они не являются законами природы. Они не утверждают связь между естественными явлениями, но утверждают таковую между суждениями; а к последним принадлежат и законы природы»[14]. Это высказывание, на наш взгляд, в определенной мере отражает существующее положение дел в отношении онто-гносеологического статуса арифметической составляющей математики. Но к нему можно добавить, например, что законы математики, на самом деле, всегда подтверждаются критерием практики и никогда не опровергаются им.

Итак, Фреге утверждает, что труд ученого состоит не в созидании, а в открытии истинных мыслей. Астроном, говорит он, исследует при помощи математики давно минувшие события, относящиеся в том числе ко времени, когда на Земле еще некому было установить истинность чего бы то ни было. Истинность мысли, таким образом, безотносительна ко времени, и истина совсем не обязательно возникает в момент ее открытия. Логика и математика же не исследуют сознание и духовный мир отдельного человека, они, скорее, исследуют разум[15]. Здесь можно отметить очевидность реалистического и объективистского истолкования математических, логических истин, а также самого понятия разума. Эти взгляды Фреге последовательно отстаивает и развивает во множестве своих работ.

Таким образом, исследования Фреге вносят многоаспектный вклад в развитие оснований математики. Одной из составляющих является логическая, или логико-математическая компонента, заключающаяся в программе построения арифметики в виде логического исчисления. Вторая компонента – это философско-методологическая установка о возможности сведения арифметики к логике. Третья составляющая носит онтологический и теоретико-познавательный характер и заключается в утверждении объективности арифметических законов и истин, а также в утверждении, что эти законы и истины относятся к свойствам разума, который, опять-таки, трактуется реалистически, объективистски.

[14] Фреге Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование понятия числа. – С. 109.

[15] См.: Фреге Г. Мысль: логическое исследование // Фреге Г. Логические исследования. – Томск: Водолей, 1997. – С. 45–46.

Можно сказать, что Бертран Рассел является продолжателем исследований Фреге практически по каждой из перечисленных установок. Но Рассел в различной степени последователен и постоянен по отношению к этим установкам. Его представления эволюционируют, порой преобразуясь до противоположных. Рассел считает, что построение Фреге не было успешно завершено потому, что Фреге пытался ограничиться одной лишь арифметикой, и потому еще, что он опирался на некоторые противоречивые принципы, которым оказались подвержены все системы логики того времени. Рассел пытается преодолеть недостатки построений Фреге, преследуя цель систематического сведения математики к логике. В совместном с Уайтхедом труде «Principia Mathematica»[16] Рассел стремится доказать, что «…вся чистая математика может быть выведена из некоторых идей и аксиом формальной логики с помощью логики отношений, без обращения к каким-либо новым неопределенным понятиям или недоказанным утверждениям»[17]. При логизации математики они используют принцип, близкий идее «бритвы Оккама», и состоящий в необходимости замены (там, где это возможно) выводов к неизвестным сущностям конструкциями из известных сущностей. Рассел и Уайтхед используют определение числа как множества всех равноэлементных множеств, данное Фреге, считая его наиболее правильным. В результате базисным понятием арифметики становится понятие множества, через которое определяется понятие числа. Однако Рассел рассматривает возможность избавления также и от понятия множества. Он говорит, обращаясь к теореме Кантора, что число классов сущностей будет больше, чем самих сущностей, поэтому признание классов (множеств) в качестве сущностей порождает проблемы. Поэтому хорошо, говорит Рассел, что все утверждения, в которых фигурируют классы, могут использоваться без предположения о том, что классы (множества) действительно существуют[18].

Как уже упоминалось, Рассел выступает продолжателем идей Фреге, но продолжателем не всегда последовательным. Так, Рассел пишет, что числа являются логическими фикциями, так как, по определению Фреге, числа это классы классов, а классы, в свою очередь, есть логические фикции. Рассел развивает идеи логического атомизма, считая, что можно теоретически обнаружить некоторые конечные простые элементы, из которых построен мир. Они обладают видом реальности, который не принадлежит чему-либо еще. Этих элементов бесконечно много и они бесконечно разнообразны, существует целая иерархия типов простых элементов бытия. Другой вид объектов, говорит Рассел, это факты. Но факты не обладают

---

[16] См.: Russell B., Whitehead A. Principia Mathematica. – Volume I-III – Cambridge At the University press, 1910–1913.

[17] Рассел Б. Логический атомизм // Рассел Б. Философия логического атомизма. – Томск: Водолей, 1999. – С. 148.

[18] Об этом см.: Там же – С. 149–151.

той реальностью, не являются сущностями так, как их конституенты[19]. Таким образом, Рассел утверждает возможность теоретического описания основ бытия и в то же время считает, что числа и множества не являются отражением части таких основ, то есть Рассел отказывается от онтологической позиции Фреге, отрицая универсальный бытийный статус чисел.

На наш взгляд, если считать числа и множества просто фикциями, то придется, например, отказаться от предположения, что дискретная и непрерывная бесконечности есть компоненты, а вернее свойства реальности, выражаемые множествами натуральных и действительных чисел. И отказаться, аналогичным образом, от предположения, что числа 0, 1, 2 и др. – обозначают некоторые свойства действительности, то есть не являются фикциями. Отказ от допустимости последнего предположения, по нашему мнению, будет неоправданным. В то же время, наверное, можно считать множества фикциями, так как мы можем, говоря о некотором элементе, предмете, рассматривать, или не рассматривать его как множество, включающее лишь один этот элемент. А множество, состоящее из всех подмножеств такого множества, будет включать два элемента – само одноэлементное множество и пустое множество и т.д. Но это всего лишь означает, что определение чисел через множества несовершенно, неполно, а не то, что числа, так же как и множества, являются логическими фикциями.

Рассел развивает принцип Оккама, говоря, что нельзя обосновывать онтологический статус объектов там, где без этого можно обойтись, или где это может быть сомнительным. Распространенную точку зрения о том, что целые числа, или, по крайней мере, число 1, являются сущностями, не удается опровергнуть, но, говорит Рассел, можно доказать, что математики не в состоянии это обосновать[20]. Рассел также ставит вопрос о существовании универсалий. Он говорит, что слова, являющиеся именами, можно осмысленно употреблять в атомарных предложениях любого рода. Существуют еще слова-отношения. Они могут быть включены в некоторые атомарные предложения в случае, когда они содержат соответствующее число имен. Рассел говорит, что универсалии – это значения слов-отношений (тех слов-отношений, значения которых существуют). Слова-отношения не имеют значений сами по себе, как например слова «если», «или» и др. Так, Рассел указывает, что отношение сходства различных объектов существует, является реальным элементом, свойством действительности. Поэтому, говорит он, мы вынуждены признать существование универсалий, по крайней мере, существование сходства. А в этом случае нет никакой необходимости изобретать средства избавиться от других универсалий[21].

---

[19] Рассел Б. Философия логического атомизма. – С. 96.

[20] Рассел Б. Логика и онтология // Рассел Б. Философия логического атомизма. – С. 173–174.

[21] Рассел Б. Исследование значения и истины. – М.: Идея-Пресс: Дом интеллектуальной книги, 1999. – 399 с. (ссылка приводится по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html) – С. 390, 393–394.

Представляется вполне очевидным, что эволюция взглядов Рассела, по крайней мере в отношении философии математики, содержит в себе долю регресса, уменьшения порядка и тенденцию к противоречиям. В частности, Рассел пересматривает реалистическую позицию Фреге по отношению к математическим истинам и объектам, признавая в то же время фрегевское определение числа. Получается буквально следующее: Рассел согласен с Фреге, что числа – это объемы понятий («быть равночисленным понятию…»), Рассел определяет универсалии как значения слов-отношений (там, где эти значения существуют), и, наконец, Рассел объявляет, что нет никакого смысла отрицать существование (он говорит – избавляться от) универсалий, но, в то же время, объявляет числа фикциями!!! Такой ход рассуждений, на наш взгляд, указывает на неубедительность сделанных выводов. Поэтому можно с определенным основанием сказать, что наибольшую ценность и потенциальную перспективность для философии математики имеют онто-гносеологические воззрения Рассела, согласующиеся с программой логицизма и идеями Г. Фреге.

Рассел отмечает, что благодаря языку возможны ситуации (особенно в математике), когда мы можем знать об истинности утверждения, хотя понять само это утверждение оказывается недоступным даже для самого развитого ума. Он развивает учение о минимальных словарях, утверждая, что Пеано свел словарь арифметики к трем словам, трем неопределяемым терминам, трем исходным понятиям. Это «ноль», «число» и «следующее за». Эти исходные понятия и пять аксиом Пеано служат базисом арифметики натуральных чисел. Но, говорит Рассел, дело в том, что для данных базисных понятий и утверждений существует бесконечное множество интерпретаций. Так, в качестве нуля можно рассматривать число 1, а в качестве числа – число, не являющееся нулем. В этом случает все пять аксиом будут истинными, и вся арифметика может быть построена, но при этом арифметические формулы будут иметь отличные от привычных нам значения: «"2" будет обозначать то, что мы обычно называем "3", но выражение "2+2" не будет значить "3+3"; оно будет значить "3+2", а "2+2=4" будет значить то, что мы обычно выражаем знаками "3+2=5"»[22]. То же, говорит Рассел, получится, если в качестве нуля взять число 100, и т.д. Все эти интерпретации будут пригодны для оперирования в рамках формульной арифметики, но если мы попытаемся использовать числа для счета предметов, когда мы находим арифметике эмпирическое и практическое применение, только тогда у нас появляются основания предпочесть одну интерпретацию всем остальным[23].

Из этих рассуждений Рассела напрашиваются два вывода. Во-первых, что обоснование математики не может ограничиваться снизу уровнем ак-

---

[22] Рассел Б. Человеческое познание: его сфера и границы. – М., 2000. – С. 197 (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html).

[23] См.: Там же.

сиоматики, обоснование должно идти далее, в глубь, формировать содержательные интерпретации онтологических и гносеологических основ математических областей. И, во-вторых, что арифметические исходные понятия и истины объективны и непосредственно связаны с действительностью, то есть отражают ее неотъемлемые свойства, описать которые является задачей философии математики, и описание которых позволило бы говорить о выявлении онтологического фундамента арифметической составляющей математики. По поводу первого вывода Рассел высказывается весьма определенно: «Математика представляет собой исследование, которое может быть продолжено, если начинать с ее наиболее знакомых частей, в двух противоположных направлениях. Первое – хорошо знакомое направление – является конструктивным с все более увеличивающейся сложностью: от целых чисел к дробям, действительным числам, комплексным числам; от сложения и умножения к дифференцированию и интегрированию и далее к высшей математике. Другое, менее знакомое, направление идет через анализ к все большей абстрактности и логической простоте; вместо того, чтобы спрашивать, что может быть определено и выведено из предполагаемых начал, мы ищем общие идеи и принципы, в терминах которых могут быть определены или выведены наши начальные принципы. Отличие математической философии от обычной математики заключается в упоре на второе направление»[24].

В рассмотрении фундаментальных основ математики Рассел выстраивает иерархическую структуру. Он утверждает, что арифметическая составляющая предшествует геометрической: «Вся традиционная чистая математика, включая аналитическую геометрию, может рассматриваться как состоящая полностью из суждений о натуральных числах. То есть термины, которые она содержит, могут быть определены через натуральные числа, а ее утверждения могут быть выведены из свойств натуральных чисел, если добавить идеи и утверждения чистой логики»[25]. Арифметической же компоненте предшествует логическая: «Пеано имел дело с тремя неопределенными терминами и пятью аксиомами. Но когда числа и сложение определяются логически, арифметика не нуждается в каких-либо недоказанных предложениях, кроме предложений логики»[26]. Таким образом, можно сказать, что отношение исходных математических истин и объектов к действительности и процессу познания, по большому счету, сводятся Расселом к онто-гносеологическим основаниям логики, что, на наш взгляд, не является правомерным. Логика, вернее логическая составляющая основ математики, трактуемая Расселом с объективистских позиций, выступает в качестве одной из трех значимых компонент онто-гносеологического фун-

---

[24] Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы / Бертран Рассел; вступ. статья В.А. Суровцева; пер. с англ. В.В. Целищева, В.А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – С. 69.
[25] Там же. – С. 71.
[26] Рассел Б. Человеческое познание: его сфера и границы. – С. 318.

дамента математического знания, вместе с геометрической и арифметической составляющими.

Рассел, определяя числа, идет по пути Фреге и, подобно Фреге, обуславливает своими определениями проблематичную ситуацию. Он определяет число 2 как класс всех пар, то есть как бесконечное множество двухэлементных множеств. Другие натуральные числа, большие, чем 2, представляют собой также бесконечные множества множеств (трех-, четырехэлементных и т.д.). А вот ноль представляется у Рассела упрощенно, как конечное одноэлементное множество: «Число 0 есть число терминов в классе, не имеющем членов, то есть в классе, который называется “нуль-класс”… …0 есть класс, чей единственный член есть нуль-класс»[27]. Тогда число ноль обладает некоторой спецификой, принципиальным отличием от всех остальных натуральных чисел (кроме, возможно, единицы). Такое отличие должно иметь онтологическое и гносеологическое оправдание, которое Рассел не предлагает.

Ученик Рассела Л. Витгенштейн также рассматривает проблемы сущностных оснований математики и, в частности, природу чисел. Числа, говорит он, так же как и другие слова – «факт», «комплекс», «функция», обозначают формальные понятия и изображаются в логической символике переменными, а не функциями или классами. Формальные понятия уже даны с объектами, которые под них подводятся, поэтому формальное понятие и объекты, подпадающие под него, нельзя вводить в качестве исходных понятий. Таким образом, говорит Витгенштейн, традиционный подход к введению исходных понятий арифметики натуральных чисел, подразумевающий включение в перечень этих понятий понятия числа вообще и понятия конкретного числа (нуля или единицы), неправомерен. Понятие числа, согласно Витгенштейну, есть общее свойство, общая форма всех чисел, есть переменное число[28].

Витгенштейн, несколько удаляясь от взглядов, созвучных логицизму Рассела, утверждает, что математика не нуждается ни в каком обосновании, в особенности логическом. Ни одна языковая игра, в том числе и математическая, не нуждается в обосновании, поскольку ее обоснование заключается в самой человеческой активности. «Сведение арифметики к символической логике должно показать применение арифметики; это как бы наука, с помощью которой осуществляется ее применение. Как если бы человеку показать сначала трубку без мундштука, а потом мундштук, который учит тому, как трубка используется»[29]. Витгенштейн пытается также обосновать позицию, согласно которой математика является «пестрой сме-

---

[27] Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. – С. 85.

[28] Об этом см.: Витгенштейн Л. Логико-философский трактат // Людвиг Витгенштейн Философские работы. – Ч. I. – М.: Гнозис, 1994. – С. 11, 22. (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html)

[29] Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Философские работы. Часть II, книга I. – М., 1994. – С. 72.

сью техник доказательства». «Математик, – говорит он, – изобретатель, а не открыватель»[30].

Можно отметить, что позиция Витгенштейна по этому, как и по ряду других вопросов, несколько непоследовательна и противоречива. Так, он отмечает определенную объективность логических и математических законов, говоря о том, что невозможно выразить в языке нечто нелогичное, так же как в математике (геометрии) нельзя нечто, противоречащее ее законам. Логические и математические истины предстают у Витгенштейна в виде выражения возможного. Такая интерпретация вполне адекватна, хотя она и связана с ошибочными представлениями о невозможности выразить в языке нечто нелогичное или описать в геометрических терминах объект, противоречащий свойствам пространства.

Рудольф Карнап, будучи представителем неопозитивистской ветви аналитической философии, высказывает, тем не менее, вполне определенную онтологическую позицию. Так, он утверждает, что формулы логики и математики не говорят сами ничего о действительности, но служат для преобразования высказываний о действительности. Истины математики и логики являются аналитическими (в Кантовском смысле) или тавтологиями (в смысле Витгенштейна) и они являются истинными уже в силу своей формы. Карнап выделяет также противоречивые (по своей форме) и, в силу этого, ложные предложения, а также эмпирические предложения, истинность которых зависит от опыта. Он говорит, следуя идее неопозитивизма, что метафизика не формулирует ни одного из вышеупомянутых типов предложений, и, значит, метафизика оперирует псевдопредложениями, не имеющими смысла[31]. Однако, следует заметить, что отказ от метафизических утверждений не вполне удается этому мыслителю. Как отмечено выше, он вполне определенно высказывает собственную точку зрения на природу математики и логики.

Как известно, Карнап предлагает в качестве главного метода и основной задачи философии логический анализ языка науки, устраняющий из нее неосмысленные слова и предложения, проясняющий высказывания, имеющие смысл, а также формирующий логическое обоснование эмпирической науки и математики. Следуя своему методу, он указывает, что выбор языка обусловлен целями, которые преследуются при его применении. Такие факторы, как эффективность, плодотворность и простота употребления языка влияют на его принятие в качестве рабочего. Однако, говорит Карнап, эффективность того или иного языкового средства никак не может нам помочь в определении того, действительно ли средства выражения близки по своему характеру к свойствам реальности: «Язык вещей в обыч-

---

[30] Там же. – С. 52.

[31] См.: Карнап Р. Преодоление метафизики логическим анализом языка [Erkenntnis / Hrsg. Carnap R, Reichenbach H. Leipzig, 1930-1931. Bd. 1. Перевод выполнен А.В. Кезиным и впервые опубликован в журнале «Вестник МГУ», сер. 7 «Философия», № 6, 1993. – С. 11–26.] // http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html – С. 12.

ной форме в самом деле работает весьма эффективно для большинства целей повседневной жизни. Это – фактическое положение, основанное на содержании нашего опыта. Однако неверно было бы описывать эту ситуацию следующим образом: «факт эффективности языка вещей есть свидетельство, подтверждающее реальность мира вещей». Вместо этого мы скорее сказали бы: “Этот факт делает целесообразным принятие языка вещей”»[32]. Такая позиция, несомненно, противоречит критериям истинности, предъявляемым эмпиризмом, рационализмом, критерию практики и, наконец, здравому смыслу. Карнап, для того чтобы оставаться последовательным позитивистом, здесь практически впадает в нигилизм и скептицизм. Он старательно игнорирует очевидный вывод, что большая эффективность некоторой языковой системы для описания определенной предметной области должна быть причинно обусловлена и что наиболее вероятной причиной такой эффективности может служить значительная степень соответствия свойств данной системы настоящему положению дел в описываемой предметной области.

Карнап говорит, что система чисел имеет скорее логическую, чем фактическую природу. Внутренние для этой системы вопросы, например «существует ли простое число большее ста?», решаются не эмпирическим, а логическим путем. Ответы на внутренние вопросы имеют логическую природу и являются логически истинными. Если понимать вопрос о существовании чисел во внутреннем смысле, говорит Карнап, то положительный ответ на него для всех очевиден. Внешний же вопрос, то есть вопрос об онтологическом статусе чисел, до сих пор не сформулирован в научных терминах, и пока это не сделано, считает Карнап, мы вправе рассматривать его как псевдовопрос, как вопрос, имеющий теоретическую форму, но на самом деле теоретическим не являющийся: «в данном случае это практический вопрос о том, включать или не включать в язык новые языковые формы, образующие каркас чисел»[33]. Таким образом, онтологическая проблема заменяется проблемой логико-лингвистического характера, то есть проблемой формирования языкового каркаса. При этом Карнап, как и Рассел, игнорирует значимый для теории познания результат, утверждающий, что практика выступает критерием истинности знания[34], то есть критерием определенной степени его соответствия действительности и, следовательно, практическая эффективность языкового каркаса должна свидетельствовать в пользу его достаточной адекватности реальному положению вещей.

---

[32] Карнап Р. Эмпиризм, семантика и онтология // Карнап Р. Значение и необходимость: Исследование по семантике и модальной логике. – Биробиджан, 2000. – С. 3. (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html)

[33] Там же. – С. 4.

[34] Об этом см.: Арепьев Е.И. Метафизический агностицизм и нигилизм аналитических концепций // Актуальные проблемы социогуманитарного знания. Сборник научных трудов кафедры философии МПГУ. Выпуск XVI. – М.: Прометей, 2003. – С. 3–14.

Карнап указывает также, что эмпирическое подтверждение или логическое обоснование, доказательство требуется только для внутренних утверждений: существуют слоны, существуют простые числа большие ста. Теоретическое оправдание, применяемое для внутренних утверждений, ошибочно было бы пытаться применить к внешним вопросам и утверждениям. Карнап, рассуждая о гипотетическом споре реалиста и номиналиста по поводу онтологического статуса чисел, пишет: «Я не могу представить себе никакого возможного доказательства, которое оба философа признали бы пригодным и которое, следовательно, если бы оно действительно было найдено, разрешило бы этот спор или хотя бы сделало бы один из противоположных тезисов более вероятным, чем другой. (Конструирование чисел как классов или свойств второго уровня, согласно методу Фреге – Рассела, конечно, не разрешает спора, потому что первый философ стал бы утверждать, а второй – отрицать существование системы классов или свойств второго уровня.)»[35].

Действительно, можно согласиться с Карнапом в том, что на данном этапе развития человеческого знания многие проблемы философии математики и, в частности, вопрос об онтологическом и гносеологическом статусе чисел не могут быть переведены в разряд частнонаучных вопросов, как это произошло, например, с некоторыми проблемами астрономии. Но в то же время невозможно игнорировать и тот факт, что наука сама периодически наглядно демонстрирует необходимость разработки ее философских оснований, необходимость соотнесения ее результатов с общими представлениями о действительности и процессе познания. Кризис классического естествознания, приведший на рубеже XIX – XX веков к пересмотру гносеологических и онтологических основ науки, служит убедительным примером того, что установки позитивизма принципиально ошибочны, что наука и человеческое знание в целом не могут обходиться без рассмотрения метафизических вопросов.

Представитель аналитической философии У. Куайн указывает, что различные подходы к истолкованию чисел (подходы Фреге, Цермело и фон Неймана) сводятся к построению некоторой теоретико-множественной модели, свойства которой соответствуют свойствам чисел. Куайн говорит, что эти версии несовместимы, но одинаково правильны[36]. Он говорит также, что мы принимаем в рассмотрение физические объекты и абстрактные объекты, такие, например, как числа. Но натуральные числа, указывает Куайн, применяются прежде всего для измерения классов, и другие важные их применения сводятся к данному. По существу, он

[35] Карнап Р. Эмпиризм, семантика и онтология. – С. 10.

[36] См.: Куайн У.В.О. Онтологическая относительность / сокр. пер. с англ. А.А. Печенкина // Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада: учеб. хрестоматия (составление, перевод, примечания и комментарии А.А. Печенкина). – М.: Издательская корпорация Логос, 1996. – С. 8. (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html)

утверждает, что числа выразимы через классы, и у нас никогда не возникает необходимости говорить собственно о числах. Числа могут быть сохранены как манера речи. В итоге, говорит Куайн: «У нас остаются лишь физические объекты и классы. Причем не только классы физических объектов, но классы классов и так далее. Некоторые из этих высших уровней нужны для выполнения функций чисел и других средств прикладной математики, поэтому приходится принимать всю иерархию, чтобы избежать дополнительных сложностей»[37]. Что же касается сущности абстрактных объектов, то Куайн утверждает иллюзорность различия между физическими и абстрактными вещами[38]. Выразимость чисел через классы (как атрибуты или классы классов) свидетельствует, по Куайну, о том, что «нет нужды дополнять нашу вселенную натуральными числами, понятыми в каком-либо существенном смысле»[39].

Говоря о классах, Куайн указывает их чрезвычайно широкую применимость, функциональность. Классы, считает он, могут выполнять работу отношений, работу натуральных чисел, рациональных, действительных, комплексных: «Вселенная классов в целом не оставляет всей классической математике желать никаких других объектов»[40]. Причем многофункциональность классов не ограничивается математической сферой, польза классов не ограничивается также экспликацией других видов абстрактных объектов. Но все это относится прежде всего к классам, или множествам, в их изначальном понимании, допускающем парадоксы. Избавление от парадоксов происходит путем наложения различных ограничений на понятие класса, что ведет к определенной утрате этим понятием естественности, и, следовательно, к усилению номиналистической позиции в истолковании природы этих объектов.

Номинализм, говорит Куайн, тяготеет к устранению из рассмотрения абстрактных объектов. Отказ от абстрактных объектов вынуждает пожертвовать некоторыми из систематических выгод, но взамен дает устранение нежелательных объектов и устранение дуализма категорий. В такой программе, говорит Куайн, главная проблема состоит в том, как сказать то, что необходимо о физических объектах, без обращения к абстрактным объектам. Номиналист, по словам Куайна, должен будет заниматься естественными науками без обращения к математике, ведь «… математика, за исключением некоторых тривиальных ее частей, таких, как самая элементарная арифметика, неизлечимо больна обязательством квантифицировать

---

[37] Куайн У. Вещи и их место в теориях / Перевод выполнен А.Л. Никифоровым. Quine W.V. O. Things and Their Place in Theories. The Belknap Press of Harvard University Press. Camb., Mass., 1981, pp. 1 – 23 / – С. 9. (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html).

[38] Там же.

[39] Куайн У.В.О. Слово и объект / Перевод Т.А. Дмитриева // http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html - §7.7.

[40] Там же. – §7.8.

абстрактные объекты»[41]. Однако, помимо радикальной номиналистской доктрины, которая может быть слишком категорична, чтобы ее придерживаться, всегда сохраняются возможности для различного рода компромиссов, в том числе – в философии математики и, в частности, в истолковании классов. Эти компромиссы, по мнению Куайна, имеют право на существование, поскольку мы должны приветствовать онтологическую экономию, достижимую с их помощью. Однако при этом, говорит он, важно всегда иметь под рукой более сильные математические теории как инструменты открытия для быстрого использования в непредвиденных случаях, даже несмотря на то, что мы берем потом на себя заботу обнаружения более экономных способов получения того же результата[42].

Таким образом, Куайн в качестве центрального понятия для арифметической составляющей математики рассматривает понятие класса или множества. Эта позиция достаточно традиционна для аналитической философии математики и не только для нее. Куайн указывает на допустимость элиминации абстрактных понятий, в частности – классов, с номиналистических позиций, но признает в то же время, что такое устранение порождает множество трудностей, которые периодически приходится преодолевать постфактум, то есть после того, как более сильные математические теории, предполагающие более обширные онтологические допущения, позволяют нам справиться с текущей задачей. Иными словами, позиция Куайна вполне может быть развита при помощи обращения к такому важному для теории познания понятию, как понятие практики. Если мы признаем, что практика является достаточно адекватным, значимым критерием истины, то большая функциональность математических теорий с широкими онтологическими допущениями, отмечаемая Куайном, должна истолковываться как свидетельство большего соответствия действительности и ее свойствам именно таких теорий, онтологические основы которых предполагают реалистическое истолкование исходных истин и абстрактных объектов. Однако сам Куайн этого не утверждает.

Позиция еще одного представителя аналитической философии – Х. Патнема – носит название реализма. Эта позиция включает в себя и представления о числах, о математике, однако реализм Патнема далек от традиционной трактовки этой точки зрения. Патнем считает, что философское познание мира, так же как и современное научное знание, не должно противоречить «базисным интуициям» человека. Одной из этих интуиций и является реализм, поскольку мы воспринимаем мир как существующий объективно, вне и преимущественно независимо от нас. Однако Патнем указывает, что на современном уровне познания реализм должен быть очищен от своих «метафизических» претензий и должен касаться только доступного нашему познанию мира, являющегося, частично, нашим тво-

[41] Там же.
[42] Там же.

рением. Таким образом, Патнем развивает идеи Канта, говоря о том, что познать мир таким, каков он сам по себе невозможно, что стремление к этому ведет нас ловушку неразрешимых проблем. Сознание, говорит Патнем, не творит и не копирует мир. Сознание и мир совместно создают сознание и мир. В отношении математики Патнем отмечает существование математического мира, творимого человеческой математической практикой[43]. Можно отметить, что позиция Патнема допускает вариативные интерпретации и оценки. В качестве одного из приемлемых допущений вполне уместно предположение о том, что Патнем признает силу аргументов, указывающих на адекватность реалистического понимания природы математики, но из-за отсутствия сколько-нибудь убедительной конкретной интерпретации такой версии он вынужден искать способы обхождения трудностей, в том числе – путем варьирования и ограничения самого понятия реализма.

Наверное, будет вполне уместным завершить настоящее исследование реалистических установок и тенденций в истолковании природы математики представителями логицизма и аналитической философии кратким обращением к позиции К. Геделя, связанного с этими течениями и предложившего наиболее категоричную версию понимания онтологических и теоретико-познавательных основ математики. Гедель отстаивает позицию, согласно которой математика имеет дело с объектами и истинами, существующими объективно, до и независимо от создания математических теорий в некотором внечувственном мире, постижение которого доступно человеку при помощи особой способности, аналогичной чувственному восприятию, но несхожей с ним[44]. Рассматривая позицию раннего Рассела по этому вопросу, Гедель отмечает, что арифметика является областью элементарной неоспоримой очевидности, наиболее близко сравнимой с чувственным восприятием, и что законы математики и логики (как считает и ранний Рассел) аналогичны по своей сути законам природы[45].

Таким образом, можно заключить, что онтологическое и гносеологическое истолкование основ математического знания и, в частности, арифметической их составляющей, в концепциях представителей логицизма и аналитической философии, включает, помимо прочего, устойчивую реалистическую тенденцию. Обобщение реалистических взглядов аналитиков на природу арифметики в настоящее время может предложить нам следующую картину: большей частью авторов признается убедительная сила аргументов в пользу реалистического понимания исходных объектов и истин

---

[43] Подробнее об этом см.: Макеева Л.Б. Философия Х. Патнэма. – М., 1996. – С. 66–68. (постраничные ссылки приводятся по электронному изданию http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html)

[44] Об этом подробнее см.: Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – С. 58 и далее; см. также: Godel K. What is Cantor’s continuum problem? // In : Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964.

[45] Гедель К. Расселовская математическая логика / К. Гедель // Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы [Текст] / Бертран Рассел; вступ. статья В.А. Суровцева; пер. с англ. В.В. Целищева, В.А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – С. 239.

арифметики, подразумевающего их объективность, их соответствие свойствам реальности, их включенность в структуру действительности. Однако, вместе с этим весьма устойчивым, если не доминирующим является представление о проблематичности, или даже невозможности построения убедительной модели онто-гносеологических основ арифметики и математики в целом. Поэтому, за исключением Фреге и Геделя, практически все рассматриваемые мыслители тяготеют к истолкованию математики, допускающему компромисс вышеуказанных установок либо путем преобразования понятия реализма, либо путем аргументации принципиальной невозможности или ненужности выявления свойств и характера связи исходных арифметических истин и объектов с действительностью, либо иными способами. Подобная позиция (вернее их типовой набор), на наш взгляд, бесперспективна и является уклонением от проблемы, которую необходимо обозначить как можно четче. Только в таком случае есть надежда на ее разрешение в обозримом будущем. Как справедливо отмечает В.Я. Перминов, «основная проблема современной философии математики состоит в том, чтобы прояснить отношение математических понятий к аспектам реальности, составляющим онтологическое основание математического мышления»[46]. Рассмотрение подходов к истолкованию природы арифметики и арифметической составляющей основ математики в концепциях логицизма и аналитической философии позволяет сделать вывод о необходимости построения современной онто-гносеологической модели, соответствующей всем ожиданиям, которые неизменно обуславливают многочисленные весомые аргументы в пользу реализма.

[46] Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – С. 60.

В.А.Еровенко, М.В. Мартон
(Минск)

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПОЗИТИВИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ФИЛОСОФОВ: КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ СТАНДАРТ

Содержательно рассуждать об онто-гносеологических проблемах обоснования математики невозможно без определенных математических знаний, которым обучают в классическом университете студентов-философов. Авторы статьи являются разработчиками типовой учебной программы «Основы высшей математики» для высших учебных заведений по специальности «философия» Министерства образования Республики Беларусь. В статье представлен этот образовательный стандарт, а также авторское видение некоторых проблем университетского математического образования философов-гуманитариев с точки зрения его продуктивности и эффективности.

Словосочетание «альтернативное позитивирование» можно наглядно интерпретировать с помощью метафоры «натяжения лука», когда визуально противоположные концы дуги лука работают на одну и ту же задачу-стрелу[1]. В контексте университетского математического образования философов, эти «концы» – это математика и философия, а «стрела» – эффективное университетское образование. Хорошо известно, что «когда тебя любят, не сомневаешься ни в чем», но «когда любишь сам, то сомневаешься во всем». Мы, как профессиональные математики, естественно, любим ее, но сомневаемся в том, что такие же чувства питают к ней наши студенты с философского отделения факультета философии и социальных наук Белорусского государственного университета.

Напомним, что ученые Древней Греции в философии и в математике развивали рациональную сторону духовной культуры, демонстрируя при этом единство науки. В эллинскую эпоху математика наравне с философией была областью «чистого знания», хотя в то же время она могла быть отнесена и к естественным наукам. Вообще говоря, философское и конкретно-научное образование различаются своими способами познания окружающего мира. Отличительная особенность философии состоит в том, что сфера ее методологических интересов направлена на теоретическое познание, точнее на рационально-теоретическое постижение мира, что, безусловно, сближает ее с математикой.

Классический образ математики традиционно ассоциируется с такими ее чертами, или в современной методической терминологии – компетенциями, как доказательность, логичность, обоснованность, а также связанными с ними критериями истинности – непротиворечивостью, полнотой и си-

---

[1] Таранов П.С. Карманная риторика. – М.: Эксмо, 2004. – С. 234.

стемностью. В конце прошлого века классический образ науки претерпел в общественном сознании существенные изменения. Говоря о классическом университетском математическом образовании студентов-философов, свою образовательную деятельность мы позитивируем как квинтэссенцию научной рациональности, воплощающую высшее философско-математическое познание. В наше время, переполненное ненаучными формами духовного освоения мира, такой подход к современному образованию можно считать «альтернативным» культивируемому сейчас коммерческому образованию.

Новые образовательные стандарты для философских и социально-гуманитарных специальностей, включающие в себя математическую составляющую – это в целом результат большой терпимости «лириков» по отношению к «физикам», точнее результат лучшего знания и понимания естественнонаучной культуры, которая избавляет нас от невежества и самоуверенности в суждениях. Перефразируя популярную максиму «счастье любви в том, чтобы любить», мы можем сказать, что «достоинство хорошего образования в том, чтобы получать удовольствие и радость от образования». Тогда образованный человек не станет свалкой бесполезной, бессмысленной и не связанной между собой рекламно-клиповой информации, а сможет самостоятельно выявлять все нужное и полезное.

Философское и конкретно-научное образование различаются своими способами познания окружающего мира. Отличительная особенность философии состоит в том, что сфера ее методологических интересов направлена на теоретическое познание, точнее на рационально-теоретическое постижение мира, что, безусловно, сближает ее с общей математикой. Авторы статьи в разное время читали курс «Основы высшей математики» для студентов-философов на дневном и заочном отделениях факультета философии и социальных наук Белорусского государственного университета. Они также являются соавторами соответствующей типовой учебной программы «Основы высшей математики» по специальности «философия» для вузов Республики Беларусь (авторы этой программы по математике: профессор В.А. Еровенко, доцент С.В. Демьянко и доцент М.В. Мартон), отдельные фрагменты которой представлены ниже.

Пояснительная записка

Современная математика является важнейшей частью мировой культуры, поэтому для связи того, что делается в математике, с другими областями научного знания необходимо участие философов. Без современной математики невозможно сформировать современное мировоззрение и интегрировать университетское образование в культуру, поскольку благодаря мировоззренческой широте своих концепций математика стала важнейшей общеобразовательной и философской дисциплиной. Сущность взаимодействия математики и философии состоит в том, что математическое знание дает точные аргументы, позволяющие в условиях многозначности философских определений сохранять свободу мысли.

Притягательность математики для философов связана с феноменальной устойчивостью и неопровержимостью математических результатов. Эффективность математического анализа явлений связана с тем, что окружающему нас миру присуща скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых и эффективных математических законов. Современная математика остается эффективным способом открывания истины и создания реальности, с помощью которой можно не только увидеть мир по-другому, но и переформулировать старые философские проблемы в контексте мировосприятия нового века. Философия дополняется математикой, поскольку математика помогает философии выявлять общие закономерности реального мира, используя для этого язык математики.

Главной целью курса «Основы высшей математики» для философов является формирование у студентов надежной интуиции относительно встречаемых ими математических объектов. Под математические структуры можно подвести многие реальные явления, поскольку математические понятия содержат потенциально неисчерпаемое многообразие интерпретаций. Сила математики заключается в мощных методах преобразования записанной на ее языке информации, находящих свое выражение в строгих доказательствах теорем и фундаментальных математических конструкциях. В таком контексте роль математического образования философов сводится к выработке понимания того, что в мире абстрактных структур математики нужно работать логическими методами.

В результате изучения дисциплины *студенты должны знать:*

- основные методы решения важнейших задач исследования реального мира, не содержащие сложных вычислений, используемые в профессиональной деятельности, содержание которой не требует использования математических знаний, выходящих за пределы потребностей повседневной жизни;
- важнейшие фрагменты истории, методологии и философии математики, а также ход ее внутреннего развития и социально-культурной эволюции в контексте неразрывной взаимосвязи математики, естественнонаучного знания и гуманитарной культуры в целом;
- наиболее существенные черты математики, в частности ее эффективность, которая достигается на основе многоступенчатого движения математики к абстрактному, достигая при этом такой общности своего языка и методов, которая обеспечивает ее универсальности и применимость;
- природу математических абстракций и принципы построения научных теорий в едином процессе развития математики, совместно с естественными и гуманитарными науками, с целью формирования эвристического и алгоритмического стиля мышления;

• основные математические структуры, описываемые с помощью систем аксиом, расширяющие выразительные возможности математики и создающие основу для конструирования общих принципов, объединяющих современную математику и подчеркивающих ее внутреннее единство.

Кроме того, *студенты должны уметь:*

• понимать смысл поставленной задачи и уметь правильно, логично и строго рассуждать, делать правдоподобные оценки, овладевая навыками современного стиля мышления, требующего умелого сочетания формального и неформального подходов исследования;

• реализовывать возможности современной математики, ее идеализаций при переходе к математической модели в формировании научного мировоззрения студентов, способствующего освоению ими научной картины мира и эффективной связи с реальным миром;

• применять математический язык и математический аппарат в качестве средства описания и исследования окружающего мира и его закономерностей для адекватного ориентирования в нем, целенаправленно расширяя и углубляя свои умения и знания;

• развивать формы абстрактного мышления и прежде всего его дедуктивную составляющую, характерную для математики и ее методов исследования, при изучении на современном уровне университетских предметов естественнонаучного и гуманитарного циклов;

• формулировать правдоподобные гипотезы, лежащие в основании теоретической научной модели, описывающей реальную ситуацию, для исследования которой может понадобиться привлечение разнообразных математических и нематематических сведений.

Мировоззренческая роль математического образования философов состоит в том, что оно помогает понять суть явлений, происходящих в окружающем нас мире. Культурная роль математического образования философов состоит в том, что, в соответствии с функциями математики, она способствует повышению общематематической культуры и философской культуры мышления. Воспитательная роль математического образования философов состоит в том, что изучение математики вырабатывает исследовательский подход к философской работе, основанной на логичности, непротиворечивости и полноте суждений.

Хорошее образование, основанное на продуктивной предметности, в широком смысле можно рассматривать как умение математически грамотно действовать при нынешних социально-экономических потрясениях, а также по-философски рассуждать в сложных житейских ситуациях. Хотя иногда «лучше переждать, чем не дождаться», кризисное состояние массового университетского образования не оставляет времени на добротный анализ его состояния и наиболее убедительную дополнительную аргументацию. Противостояние «физиков» и «лириков» во второй половине прошлого века спровоцировало впечатление, сохранившее свою актуальность, что есть методологическая несовместимость между математикой и социально-гуманитарным знанием. Однако история современной науки показывает и доказывает, что такой основополагающей несовместимости не существует.

Учебный курс «Основы высшей математики» для философов рассчитан на 34 часа: 18 часов лекций, 12 часов практических занятий и 4 часа КСР. Студенты изучают данную дисциплину на протяжении одного семестра.

Примерный тематический план

Названия разделов и тем	Лекции, час	Практические занятия, час	Всего, час
1. Раздел I. Введение в аксиоматический метод			
1.1. Основные этапы становления понятий современной математики и характерные черты математического мышления	2		2
1.2. Представление об аксиоматическом методе построения математики. Аксиоматика Пеано натурального ряда чисел и законы арифметики	2		2
2. Раздел II. Элементы теории множеств			
2.1. Представление об общих свойствах конечных или бесконечных множеств и возможности их количественного сравнения	2	2	4
2.2. Операции над множествами, их основные свойства и их использование в идее классификации	2	4	6
3. Раздел III. Введение в комбинаторный анализ			
3.1. Основные комбинаторные принципы и комбинаторные модели для упорядоченных и неупорядоченных наборов	2	2	4
3.2. Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов	2	2	4

4. Раздел IV. Элементы математики случайного			
4.1. Классическая вероятность случайного события и философско-методологические проблемы становления аксиоматики теории вероятностей	2	2	4
4.2. Методы определения вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей	2	4	6
5. Раздел V. Введение в философию математики			
5.1. Проблема обоснования математики с точки зрения философско-методологических понятий непротиворечивости и полноты	1		1
5.2. Философские проблемы, касающиеся природы математических доказательств	1		1
Всего:	18	16	3 4

Заметим, что выбор тем был обусловлен, в первую очередь, авторским видением их полезности и важности для математического образования философов, а во вторую – небольшим количеством часов, выделенным на этот курс. Мотивировать этот выбор можно следующим образом. Нередко в философских и вообще гуманитарных работах встречаются обороты типа «очевидно, как дважды два четыре». Заметим, что для математиков это стало очевидным с математической точки зрения только в конце XIX века, после появления аксиоматики Пеано для натуральных чисел.

На примере этой аксиоматики – простой, наглядной и доступной даже математически неудовлетворительно подготовленному студенту легко строго аргументировано, убедительно и мотивированно показать роль и сущность аксиоматического метода в структуре современной математики. Выбор темы, связанной с элементами теории множеств, как правило, никогда не вызывает сомнений в любом курсе математики для гуманитариев, так как, с одной стороны, – это рабочий язык современной математики, а с другой – на примере бесконечных множеств Кантора можно попытаться объяснить сущность взаимодействия философии и математики в решении вечной проблемы бесконечности.

Далее заметим, что в любом философско-гуманитарном знании, претендующем на научность, точнее, связанном с количественными выкладками, наиболее востребованным разделом математики является теория вероятностей и математической статистики. Кроме того, отдельного упоминания в студенческой аудитории будущих философов заслуживает философский анализ математической сути понятия случайного, что и рассматривается в разделе математики случайного. Наконец, курс математики для философов вполне естественно закончить философско-методологическими проблемами обоснования самой математики.

В проекте «Идея университета» английского мыслителя и педагога XIX века Джона Ньюмена упор делается на качественное образование, в котором исключительно утилитарное обучение не занимает ведущее место. В наше время не существует опасности избыточного образования, опасность как раз заключается в другом. Еще в позапрошлом веке Джон Ньюмен писал: «Позволю себе сказать о практической ошибке последних двадцати лет – это не просто нагрузка студентов массой неусвоенных знаний, но насилие таким их количеством, что студент отвергает все целиком»[2]. Это традиционная методическая ошибка перегрузки студентов «бессмысленным массивом» учебных предметов, точнее ненужными разделами непрофильных для них дисциплин. Она возникает в предположении гипотетически возможной пользы от дилетантского знакомства с этими предметами, хотя это и не связано с интеллектуальным ростом студентов, который при таком подходе скорее нарушается. В такой образовательной ситуации особенно важен методически правильный отбор тем по курсу математики для философов.

Современная ситуация с качеством образования осложняется еще тем, что на смену идеалу научно-рациональной деятельности как учебно-сложной и строго организованной системы пришли его упрощенные «суррогаты» из специальных разновидностей квазинауки, паранауки и псевдонауки. К чести классического университетского математического образования можно отнести то, что даже в «смутные» времена социально-общественных перемен математики не ставили под сомнение, что их фундаментальная наука в своей основе – это прежде всего научно-рациональная деятельность, опирающаяся на систему хорошо доказанных и обоснованных процедур.

Изложим теперь более подробно содержание тем учебного материала по курсу «Основы высшей математики» для студентов-философов.

<u>Раздел I. Введение в аксиоматический метод</u>

Тема 1.1. Основные этапы становления понятий современной математики и характерные черты математического мышления.

Методологическая проблема преподавания основ высшей математики для философов как проблема построения смысла, в отличие от проблемы уровня строгости изложения. Некоторые расхождения между философским языком и языком математики, связанные со способом передачи информации.

[2] Ньюмен Дж.Г. Идея университета. – Минск: БГУ, 2006. – С. 129.

Тема 1.2. Представление об аксиоматическом методе построения математики. Аксиоматика Пеано натурального ряда чисел и законы арифметики.

Аксиомы Пеано для натуральных чисел. Понятие независимости аксиом на примере независимости аксиом Пеано. Различная интерпретация аксиоматики натурального ряда чисел Пеано. Аксиоматическое определение арифметических операций и доказательство некоторых свойств арифметических операций.

Раздел II. Элементы теории множеств

Тема 2.1. Представление об общих свойствах конечных или бесконечных множеств и возможности их количественного сравнения.

Интуитивное определение Кантора понятия множества. Философское понятие актуальной и потенциальной бесконечности. Различие свойств конечных и бесконечных множеств на основе понятия взаимнооднозначного отображения.

Тема 2.2. Операции над множествами, их основные свойства и их использование в идее классификации.

Определение основных операций над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение. Простейшие свойства для операций объединения и пересечения множеств: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Понятие эквивалентности и его использование в процедуре математической классификации множеств.

Раздел III. Введение в комбинаторный анализ

Тема 3.1. Основные комбинаторные принципы и комбинаторные модели для упорядоченных и неупорядоченных наборов.

Комбинаторный принцип сложения и комбинаторный принцип умножения. Применение аппарата теории множеств в построении математических моделей комбинаторных задач.

Тема 3.2. Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов.

Вывод формул для подсчета числа перестановок, размещений и сочетаний. Комбинаторные задачи с повторениями и комбинаторные задачи без повторений на примере философских и социально-гуманитарных задач.

Раздел IV. Элементы математики случайного

Тема 4.1. Классическая вероятность случайного события и философско-методологические проблемы становления аксиоматики теории вероятностей.

Определение классической вероятности и решение задач на подсчет классической вероятности с помощью основных комбинаторных формул.

Философские определения случайного и вероятностного и их сравнение с соответствующими математическими понятиями.

Тема 4.2. Методы определения вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

Формулы для вероятности суммы несовместных и совместных событий. Формулы для вероятности произведения зависимых и независимых событий. Методы подсчета вероятности сложных событий социально-гуманитарного знания.

Раздел V. Введение в философию математики

Тема 5.1. Проблема обоснования математики с точки зрения философско-методологических понятий непротиворечивости и полноты.

Основные рабочие программы современной математики: формализм, интуиционизм и платонизм. Обоснование математического знания с точки зрения непротиворечивости и полноты в контексте программы формализма Гильберта.

Тема 5.2 Философские проблемы природы математических доказательств.

Анализ философско-методологической природы математического доказательства на примере простейших теорем элементарной и высшей математики. Генезис понятия строгости математического доказательства в современной математике.

Основная литература, рекомендованная по этому курсу

1. Болтянский В.Г., Савин А.П. Беседы о математике. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. – 368 с.

2. Дорофеева А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. и доп. – М.: Дрофа, 2003. – 384 с.

3. Еровенко В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.

4. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев: учеб. – М.: Гардарики, 2002. – 531 с.

5. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: учеб. – 2-е изд. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 272 с.

* * *

Закончить обзор, можно сказать, «минимального» образовательно-математического стандарта для студентов-философов, рассмотренного выше, хочется ссылкой на знаменитого философа Людвига Витгенштейна, часть работ которого посвящена философии математики. Он очень полезен в студенческой аудитории начинающих философов, поскольку многие уже слышали о нем, но читали его лишь немногие. В «Логико-философском трактате» раннего Витгенштейна утверждалось, что любые суждения имеют смысл лишь тогда, когда они отражают реальные факты. В духе этого высказывания реальное положение дел с математическим образованием гуманитариев выглядит пока не лучшим образом, и виноваты в этом обе стороны. Но, к нашему общему удовлетворению, с ранним Витгенштейном категорически был не согласен поздний Витгенштейн, который усматривал смысл во всем, что является практически целесообразным.

Именно это последнее утверждение служит моральной поддержкой для профессиональных носителей современной математической культуры, поскольку математики во все времена хранили платонистскую веру в практическую целесообразность и необходимость своей интеллектуальной деятельности. В споре о приоритетах в философско-гуманитарном образовании можно победить только посредством логики, компоновки смысла и практических аргументов. Но следует заметить, что это не оказывает никакого влияния на гуманитарно ориентированный разум человека, если он изначально против любой внешней для него точки зрения. Поэтому в налаживании диалога с «правоверными гуманитариями» необходимо попытаться понять чужую точку зрения, не бросая вызов умозаключениям собеседников, занимающих самодостаточную для них оборонительную позицию.

Бездуховность сурово обнажила грубые рыночно-капиталистические отношения между людьми. В наше сложное время все это актуализирует проблему полноценного современного университетского образования. В качественном образовании нравственность, фундаментальность, а также профессионализм должны все же преодолеть безнравственное, непрактичное и бесполезное образование. Можно надеяться, что хотя бы в ближайшей перспективе «негативно плохое», то есть скучное и некомпетентное образование, может довольно скоро стать хотя бы «позитивно плохим», то есть пусть и неумело, но маскирующим свой полупрофессионализм, а в более далекой перспективе будем надеяться на то, что оно станет все же «избыточно хорошим». Но какими бы благими намерениями мы ни руководствовались, можно не сомневаться в том, что их последствия все равно могут быть самыми непредвиденными.

Тем не менее, позитивная составляющая всех дискуссий на эту тему реализуется в знаменитой аксиоме риторики «что мы скажем, то другой подумает». Если любопытному философу-гуманитарию нравится узнавать интеллектуально новое, то ему трудно пресытиться, так как новому в математике и естественнонаучном знании нет конца[3]. Это, на наш взгляд,

---

[3] См., например, последние работы авторов:

Еровенко В. Вера в силу знания: к философским проблемам математического образования // Беларуская думка. – 2007. – № 2. – С. 85–92.

Еровенко В.А., Демьянко С.В. «Запрет Витгенштейна» и интеллектуальная целостность математического и философского знания // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2008. – № 2. – С. 3–8.

Еровенко В. «Максима Канта» и общее математическое образование // Наука и инновации. – 2008. – № 1. – С. 9–12.

Еровенко В.А., Михайлова Н.В. Математика и философия: чувство онтологического одиночества // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2008. – № 2. – С. 3–10.

наиболее эффективный мотив необходимости включения мировоззренчески-познавательного университетского курса «Основы высшей математики» в философско-гуманитарный образовательный стандарт. Для философов-математиков математика сама по себе «воплощенная рациональность», в которой критерии рациональности совпадают с критериями научности. К сожалению, в постсоветское время произошло изменение общей культурно-ценностной парадигмы, определяющей образ жизни человека и основные приоритеты социальных ориентаций.

Знание получает гордый статус науки или философии, когда его подчиняют строгой образовательной цели или заключают в определенные формы рассудочной деятельности. Чем более глубоки знания о мире и человеке, тем более абстрактными становятся научные построения, а в чистоте и строгости таких построений математике все еще нет равных.

Еровенко В.А. Актуализация артефакта: мировоззренческая проблема взаимодействия математики и философии // Философия и социальные науки. – 2008. – № 3. – С. 44–50.

Еровенко В.А., Сиренко С.Н. Миссия школы и университета в математическом образовании гуманитариев // Адукацыя і выхаванне. – 2008. – № 4. – С. 54–60.

Еровенко В.А. Пророчество Декарта и «наука о воспитании» математической культуры гуманитариев // Педагогика. – 2008. – № 7. – С. 32–39.

П.С. Карако
(Минск)

В. И. ВЕРНАДСКИЙ И ДЕТЕРМИНИСТСКАЯ ПАРАДИГМА В СОВРЕМЕННОМ ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

В статье раскрывается вклад В. И. Вернадского в становление вероятностной формы детерминизма в период перехода естествознания от классического периода своего развития к неклассическому. Обосновывается парадигмальный статус детерминизма в постклассической науке при постижении ею самоорганизующихся и саморазвивающихся систем. Дается объективная трактовка целевой причины, выявляется ее место в современной форме детерминизма.

Какой детерминизм «исчезает для современной физики»?

В современных исследованиях творческого наследия выдающегося русского ученого и мыслителя В. И. Вернадского (1863 – 1945) основное внимание уделяется выявлению его вклада в создание научной концепции биосферы и ее перехода в ноосферу. Несомненно, что в период обострения глобальных проблем и необходимости их решать такого рода работы заслуживают признания. Но при их осуществлении из поля зрения многих исследователей выпадают те философские основания, которые были положены Вернадским в его учение о биосфере и ноосфере. Анализ их места и роли в обоснованной им концепции единого социоприродного развития имеет существенное значение и для постижения основных методологических установок современного научного знания, общих закономерностей его развития. В данной работе будет осуществлено исследование только одной из таких парадигмальных установок, которая была в центре внимания Вернадского в период его работы над созданием своего учения о биосфере и ноосфере.

В. И. Вернадский имеет прямое отношение к обоснованию детерминистской парадигмы в современной науке. При характеристике особенностей классического этапа развития науки, им были отмечены и ее парадигмальные основы. Среди них назывались причинность и детерминизм. Но уже в 20 годы XX века под влиянием бурного развития естествознания и прежде всего физики вскрылась ограниченность их прежнего понимания и использования в качестве методологических основ науки. Вернадский писал, что в новых условиях познания «перестает прилагаться в обычном понимании закон причинности. Этот закон – альфа и омега ньютоновской картины мира. Идею, лежащую в основе его, ярко выразил П.С. Лаплас, допуская возможность охватить Вселенную в одной формуле, решая которую можно вычислить и движение планет и течение мысли, движение тростника и изменение спиральной туманности. Такой *детерминизм исче-*

зает для современной физики для определенной категории физических явлений»[1].

В этом суждении Вернадского подчеркивается не только ограниченность и необходимость отказа от детерминизма классической науки, но и ограниченность той формы причинной связи, на которой он строился. Детерминизм опирается на принцип каузальности, но, как будет показано нами далее, к нему не сводится. Всеобщая связь и обусловленность вещей и явлений, которая фиксируется детерминизмом, выражается целостной системой специфических категорий, которые отражают отдельные формы этой связи. Но среди них существенную роль играет причинная связь. Она выражает механизм порождения, генезис явлений. В классической науке детерминизм целиком и полностью сводился к причинным связям. Причем связям линейным, однозначным. На эту особенность понимания причинности и детерминизма в классической науке обратил внимание и Вернадский.

Им было отмечено, что в новых условиях познания прежнее понимание причинности перестает служить науке. В труде «Очерки геохимии» (1924, 1934) он писал, что в современном ему естествознании «понятие физической причинности резко меняется, углубляется путем разрушения вековых о нем представлений, как только мы научно проникаем в мир атомов»[2]. Именно постижение «мира атомов», их сложности, раскрытие многих форм связей между его элементами привело к новому пониманию причинности. Вернадским было показано, что в новых исторических условиях развития научного знания «старое» представление о причинной связи, как однозначной, механической зависимости одной вещи или явления от других вещей и явлений, обогащается новым содержанием. В вышеназванном труде он отмечал, что еще «никогда в истории человеческой мысли идея и чувство единого целого, причинной связи всех научно наблюдаемых явлений не имела той глубины, остроты и ясности, какой они достигли сейчас, в XX столетии»[3].

В. И. Вернадский подчеркивал, что отказ от классического механистического детерминизма, опиравшегося на однозначную форму причинной связи, произошел после раскрытия физиками второй половины XIX века (Л. Больцман, Дж. Максвелл) ограниченности динамических законов. Оказалось, что более глубокие связи в природе отражают не динамические, а статистические законы. Утверждение в 20-х годах XX века квантовой механики позволило вскрыть и статистический характер законов микромира. Этим самым в сферу научного знания была введена и качественно новая форма причинной связи – статистическая причинность. Поскольку статистические закономерности являются выражением вероятностного харак-

---

[1] Вернадский В.И. Труды по философии естествознания. – М., 2000. – С. 96.
[2] Вернадский В.И. Очерки геохимии. – М., 1983. – С. 12.
[3] Там же. – С. 11.

тера проявления физических явлений, постольку и детерминизм в статистических закономерностях представляет качественно отличную от механистического детерминизма форму детерминации. Уже в 20 годы такой детерминизм назвали вероятностным. В обоснование и утверждение этой новой формы детерминизма и ее парадигмального статуса существенный вклад вносит и Вернадский.

Данный аспект его научного творчества до сих пор не получил должного анализа и оценки. Но это важная составная часть разработанного им учения о биосфере. Именно в рамках этого учения и была обоснована Вернадским вероятностная форма детерминизма. В чем она выражается?

Учение о «живом веществе» и вероятностный детерминизм

Содержание этой формы детерминизма может быть выявлено при анализе понятия «живое вещество». Данное понятие является одним из основных в биогеохимической концепции биосферы, развитой Вернадским. Для него живое вещество – это совокупность существующих в данный момент живых организмов биосферы. Внутри этой совокупности и в ее взаимоотношениях с неживыми частями биосферы складываются и более сложные причинные связи. В совокупностях живого проявляются и другие типы закономерностей – статистические. В постижении последних Вернадский видел и основную цель исследователей биосферы. Более того, статистические закономерности выступали у него и парадигмальными. Они принимались им в качестве методологической установки в познании биосферы. «Биогеохимик, – писал Вернадский, – имеет дело с совокупностями и со средними – статистическими – выражениями явлений. Он обращает при этом основное внимание на математическое выражение явлений: выражение средними числами или геометрическими образами»[4].

Весьма плодотворно отмеченные методологические приемы были использованы и самим Вернадским. Уже в начале 20-х годов они были положены им в основу исследования геохимической энергии живого, скорости передачи жизни в биосфере, давлении живого вещества в ней и т.д. Отмеченные и другие свойства живого можно было выявить, исследуя не отдельный организм, а их совокупности. При исследовании совокупностей «каждый предмет в отдельности для нас исчезает и вместо него выступает нечто новое, обладающее такими свойствами и проявлениями, которые не заметны и не существуют для отдельного предмета, составляющего совокупность»[5].

Исследуя живое вещество как совокупность всех живых организмов нашей планеты, Вернадский выявил и его роль в становлении биосферы, поддержании ее устойчивого функционирования и эволюции. На основе

[4] Вернадский В.И. О науке. – Т. I. – Дубна, 1997. – С. 481.
[5] Вернадский В.И. Живое вещество. – М., 1978. – С. 52.

отмеченных исследований им была сформулирована и развита биогеохимическая концепция биосферы. Последняя была изложена Вернадским в труде «Биосфера» (1926).

В работах 20-х годов им подчеркивалась общность методологических принципов познания природных объектов и процессов. Именно понимание их как совокупностей и использование статистических (математических) приемов их познания и описания позволяет вскрыть в них общие закономерности. В совокупностях, будь то живые организмы или «газовые смеси, песчаные массы, звездные потоки, раз только мы изучаем их как законы совокупностей, они подчинены законам больших чисел»[6]. Даже случайное поведение отдельного элемента этой совокупности оказывается подчинено определенному статистическому закону. Так случайность стала предметом научного познания.

Внутри отмеченных Вернадским совокупностей складываются и более сложные причинные связи. В них нельзя предсказать появление какого-либо единичного события, так как оно случайно. Можно установить только вероятность его наступления. В этих исследованиях «совокупность с входящими в нее случайными явлениями предстает как вероятностная система»[7].

В таких системах и детерминация процессов предстает в другой форме. Ее своеобразие связано с наличием статистических закономерностей в различного рода совокупностях. В процессе постижения таких закономерностей к середине 20-х годов была сформулирована развитая теория вероятностей. К ее созданию причастен и Вернадский. Он не только показал эвристическую ценность вероятностных идей в познании биосферных процессов, но и на их основе сформулировал и развил подлинно научную концепцию биосферы. Все это было переломным, революционным явлением в науке первой половины XX века. Вот почему мы соглашаемся с выводом Ю.В. Сачкова, что «вхождение вероятности в науку произвело в ней великую концептуальную революцию» [8].

Одной из сторон этой революции было утверждение в системе научного знания вероятностной формы детерминизма. На место механистического детерминизма классического периода развития науки в 20-е годы XX века в систему ее методологических основ был введен детерминизм, опирающийся на статистические закономерности. Такой детерминизм отражал специфические особенности детерминации разного рода совокупностей объектов и процессов. Причем отражал глубже и полнее, чем это осуществлялось механистическим детерминизмом. В силу этого вероятност-

---

[6] Там же.
[7] Рокицкий П.Ф. Специфика современного этапа развития биологии // Биология и современное научное познание. – М., 1980. – С.16.
[8] Сачков Ю.В. Вероятностная революция в науке. – М., 1999. – С. 7.

ный детерминизм с самого начала своего обоснования становился парадигмальным для научного знания.

Его методологическую роль для естествознания отмечают и видные ученые современности. Так, И. Пригожин и И. Стенгерс пишут, что в настоящее время при осуществлении исследований природных процессов «мы не можем говорить более о причинности в каждом отдельном эксперименте. Имеет смысл говорить лишь о статистической причинности. С такой ситуацией мы столкнулись довольно давно – с возникновением квантовой механики, но с особой остротой она дала о себе знать в последнее время, когда случайность и вероятность стали играть существенную роль даже в классической динамике и химии. С этим и связано основное отличие современной тенденции по сравнению с классической»[9]. Ими показано, что эта «современная тенденция» в химии находит свое выражение в использовании положений статистической теории при описании скоростей химических реакций. По их мнению, «только статистическое описание» таких реакций позволяет наиболее полно выразить сущность химических процессов. Вот почему в понятийном аппарате современной химии надежно «прописались» качественно новые для нее термины – «бифуркация», «флуктуация», «распределение вероятностей» и т. д., которые используются для описания статистического характера химических реакций и процессов.

И. Пригожин подчеркивает важность вероятностных идей и для всего научного знания. «Вероятность, – пишет он, – играет существенную роль в большинстве наук – от экономики до генетики. Тем не менее, до сих пор бытует мнение, что вероятность – всего лишь состояние ума. Теперь нам необходимо сделать еще один шаг и показать, каким образом вероятность входит в фундаментальные законы физики, классической или квантовой»[10]. На последующих страницах этой и других работ им раскрывается механизм «вхождения» вероятности в современную физику. Вопросы вероятностной детерминации физических процессов и явлений раскрывались в специальных работах С.Т. Мелюхина, Ю.В. Сачкова и других исследователей. К ним мы и отсылаем тех, кто интересуется данной проблемой.

Эвристическую ценность вероятностного детерминизма для многих областей научного знания видел и Вернадский. Он утверждал, что «закономерности совокупностей», установленные одной областью знания, следует «путем научной аналогии… переносить в область мало изученную, подчиненную этим законам»[11]. Для Вернадского такой «мало изученной» областью являлись особенности организменного и видового уровня организации живого. Основные концепции их жизнедеятельности и развития в 20-е годы еще строились на методологической основе механистического

[9] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М., 2003. – С. 274–275.
[10] Пригожин И. Конец определенности. – Ижевск, 2001. – С. 22.
[11] Вернадский В.И. Живое вещество. – М., 1978. – С. 52.

детерминизма, что приводило к весьма упрощенным трактовкам новейших достижений биологии, особенно в познании явлений наследственности, противостоянию научных и антинаучных (виталистических и ламарксистских) идей. Все это сдерживало развитие биологических знаний. Это отставание неоднократно фиксирует в своих трудах Вернадский. Так, в работе «Биосфера» он писал, что «господствующие» виталистические и механистические представления о жизни «оказывают в изучении явлений жизни тормозящее влияние, запутывают эмпирические обобщения»[12].

Выход из сложившейся ситуации в области наук о живом он связывал с освоением биологами идей и представлений лидирующей в это время в естествознании физики. «Переворот, совершающийся в нашем XX в. в физике, – писал Вернадский, – ставит в научном мышлении на очередь пересмотр основных биологических представлений»[13]. Особенно представлений, базировавшихся на прежней механистической методологии (каузальная эмбриология, классическая генетика и т. д.). Отход физики от механистического детерминизма и восприятие ею вероятностного детерминизма, опирающегося на статистические закономерности, обеспечило и ее бурное развитие. Включение этих закономерностей в методологические установки биологии и систему ее теоретических представлений способствовало бы, по убеждению Вернадского, такому же развитию и этой области знания. Ведь «в комплексах организмов – в живом веществе, да и в отдельных организмах, размножение, рост, т. е. работа превращения ими энергии солнечной в земную, химическую, – все подчиняется неизменным математическим закономерностям»[14]. В мире живого, пишет далее Вернадский, все «подчиняется мере и гармонии, какую мы видим в стройных движениях небесных светил и начинаем видеть в системе атомов вещества и атомов энергии». Эти общие закономерности организации и движения природных объектов должны учитывать, по его убеждению, и биологи.

Вероятностный детерминизм и биологическое познание

Следует отметить, что обоснованные Вернадским «рекомендации» были плодотворно использованы биологами. В этом плане заслуживает внимания работа известного русского и советского биолога С.С. Четверикова «О некоторых моментах эволюционного процесса с точки зрения современной генетики» (1926). В ней была выдвинута задача разработать «синтетическое» понимание эволюционного процесса и осуществить синтез идей генетики и дарвиновской теории эволюции. Выполнение поставленной задачи было осуществлено Четвериковым на основе методологических положений вероятностного детерминизма. Все это было новым для биологии того времени. «Ничего нет принципиально недопустимого в том,

[12] Вернадский В.И. Биосфера: Мысли и наброски. – М., 2001. – С. 29.
[13] Вернадский В.И. Труды по философии естествознания. – М., 2000. – С. 89.
[14] Вернадский В.И. Биосфера: Мысли и наброски. – М., 2001. – С. 39.

– писал он, – что в основу закономерного процесса эволюции мы ставим случайное появление геновариаций (мутаций. – П. К.), ибо теория вероятности учит нас тому, что случай подчиняется таким же законам, как и все на свете. И строить закономерный процесс эволюции на случайной игре отдельных возникающих геновариаций не менее закономерно и логично, чем строить закономерную теорию упругости газов на игре случайных ударов молекул газа о стенки сосуда. И не надо забывать, что в наших рассуждениях мы все время имели дело с массовыми явлениями, с громадными числами»[15].

С.С. Четвериковым было вскрыто, что геновариации (мутации), которых «громадное число», протекают в особых природных совокупностях живого – популяциях, являющихся элементарной единицей эволюционного процесса. В последующих исследованиях Дж.Б.С. Холдейна, Р. Фишера, С. Райта, Н.П. Дубинина, Н.В. Тимофеева-Ресовского, И.И. Шмальгаузена и других ученых это положение получило дальнейшее развитие. Ими было показано, что эволюционный процесс, хотя и основывается на мутациях, протекающих в отдельных организмах, но к ним не сводится. Материалом для эволюции являются изменения генетического состава не отдельной особи (Г. де Фриз, Т. Морган), а совокупности определенным образом связанных между собою особей данного вида – популяции. Именно высокая степень гетерогенности природных популяций, вызванная мутационным процессом, составляет основу для действия других факторов эволюции и прежде всего естественного отбора. Вот почему элементарной единицей эволюционного процесса являются не отдельные особи, а популяции. «Закономерное изменение структуры популяции соответственно историческим изменениям соотношений с внешней средой и называется эволюцией»[16], – писал И.И. Шмальгаузен.

Качественный скачок в трактовке исходной единицы эволюционного процесса произвел изменения в стиле мышления современных биологов. Характеризуя его содержание, известный американский биолог-эволюционист Э. Майр писал: «Замена типологического (организмоцентрического. – П.К.) мышления мышлением в популяционных понятиях явилось, вероятно, величайшей концептуальной революцией, когда-либо происходившей в биологии. Даже Дарвин, который более чем кто-либо способствовал проникновению в биологию популяционного мышления, часто скатывался назад к типологическому мышлению»[17].

Утверждение популяционного стиля мышления в биологии способствовало вычленению популяций и изменений их генотипического состава в качестве элементарных эволюционных структур и элементарных эволю-

[15] Четвериков С.С. О некоторых моментах эволюционного процесса с точки зрения современной генетики // Классики советской генетики. – М., 1968. – С. 169.
[16] Шмальгаузен И.И. Кибернетические вопросы биологии. – Новосибирск, 1968. – С. 189.
[17] Майр Э. Популяции, виды и эволюция. – М., 1974. – С. 13.

ционных изменений. Все это открывало широкий простор для использования статистических закономерностей и математики в сфере исследования сущности эволюционного процесса. Популяционные представления легли в основу современного варианта дарвинизма – синтетической теории эволюции. Она гораздо глубже и полнее отражает закономерности эволюционного процесса, чем это осуществлялось в прежней, дарвиновской концепции эволюции. Вычленение элементарных эволюционных структур и элементарных эволюционных изменений открыло широкий простор для использования математики в сфере исследования закономерностей эволюционного процесса. В настоящее время создано даже особое направление исследований – эволюционная математика. С помощью математики стало возможным моделировать и делать прогнозы относительно состояния отдельных популяций и биоценозов, испытывающих антропогенные воздействия.

С 30-х годов XX века статистические закономерности стали активно использоваться и в учении о наследственности. В процессе анализа статистического характера генетических явлений сформировалась даже отдельное направление познания – статистическая генетика. Используя ее методы в исследовании явлений наследования, мутационных процессов, генетической структуры популяций и их изменений под влиянием отбора и других факторов, генетики убедились, что «нередко биологические закономерности только и осуществляются в форме статистических»[18].

Если генетики убедились в существовании статистической формы проявления биологических закономерностей, то в экологии утверждение данного положения несколько «задержалось». Определенный «вклад» в эту «задержку» внес американский эколог Б. Коммонер. В начале 70-х годов XX века им были введены в экологию положения, которые многие его приверженцы назвали «законами Коммонера». Такой их статус подвергался сомнению некоторыми исследователями. В частности, видный эколог Н.Ф. Реймерс писал, что «"законы" Коммонера скорее афоризмы, чем строго сформулированные положения»[19]. Тем не менее, они считались последними достижениями экологии и теоретической основой технологической деятельности человека. Даже в одном из учебных пособий утверждается, что «гармонирующие с окружающей средой производство и потребление должны основываться на законах экологии, в том числе и сформулированных известным экологом Б. Коммонером»[20].

Один из его «законов» сводится к утверждению, что «все связано со всем». В этой формулировке выражается жесткая форма связи в природных системах, и прежде всего экологических. Все многообразие связей между их элементами, систем между собой и окружающей их средой сво-

[18] Рокицкий П.Ф. Введение в статистическую генетику. – Мн., 1978. – С.8.
[19] Реймерс Н.Ф. Экология (теории, законы, правила, принципы и гипотезы). – М., 1994 – С. 170.
[20] Агроэкология. – М., 2000.– С. 514.

дится, по сути, к однозначным, линейным связям. Но системы, устроенные на таких жестких формах связи, не смогли бы существовать и эволюционировать. Данными свойствами могут обладать только такие системы, в которых складываются иные, нежесткие формы связей. «Функционировать и развиваться подобные системы могут только благодаря вариабельности их элементов, – пишет А.М. Гиляров, – стохастичности многих событий и определенной (хотя и ограниченной) автономии организмов от окружающей среды»[21].

В цитируемом суждении известного эколога следует видеть признание им наличия статистических закономерностей в экологических системах и важности использования качественно новых подходов при их исследовании и описании. Действительно, в последние годы ряд экологов и математиков стали говорить и писать об ограниченности математических моделей роста численности популяций, предложенных А. Лотка (1925) и В. Вальтера (1931). В их моделях взаимоотношения между двумя популяциями выражались в форме жесткой причинной связи по типу «хищник – жертва». Вот почему эти модели были далеки от описания реальных связей и зависимостей в таких системах. В них допускались бесконечно большие значения численности популяций и не учитывались случайные процессы как в самих системах, так и в окружающей их среде. Все это может быть учтено и описано при помощи стохастических моделей[22]. Современная математическая экология как раз и ориентируется на раскрытие и описание с помощью дифференциальных уравнений стохастических состояний экологических систем. Все это есть свидетельство включения идей вероятностного детерминизма в современную экологию.

Органический детерминизм и целевая причинность в науке о жизни

На методологической основе этого детерминизма стала по-другому решаться и «старая» проблема биологии – взаимоотношения организма и окружающей его среды. Оказалось, что организм неоднозначно реагирует на факторы внешней среды. Благодаря наличию сложной системы регуляции и управления процессами жизнедеятельности он опосредует воздействия внешних факторов. Тем самым качество результата его взаимодействий со средой определяется самим организмом, особенностями его наследственности. В биологическом познании такой характер детерминации явлений жизни получает свою специфическую форму и обозначается как *органический детерминизм* [23]. В его обоснование существенный вклад внес И.Т. Фролов.

[21] Гиляров А.М. Перестройка в экологии: от описания видимого к пониманию скрытого // Вестник РАН. – 2005. – № 3. – С. 216.

[22] Хотунцев Ю. Л. Экология и экологическая безопасность. – М., 2004. – С. 13, 17.

[23] Фролов И.Т. Жизнь и познание. – М., 1981. – С. 126.

Включение этой формы детерминизма в систему методологических установок современной биологии может иметь существенное значение и для решения более широкого круга проблем философии науки. Одной из них становится вопрос о статусе целевой причинности. В настоящее время к этой причинной связи стало обращаться внимание многих исследователей. Так, Л.В. Фесенкова пишет, что «сегодня введение в науку целевой причинности настоятельно требуется всей логикой ее дальнейшего развития»[24]. Ею ставится даже вопрос о придании целевой причине парадигмального статуса.

Важность включения целевой причины в систему научного анализа подчеркивают и другие исследователи. Например, В.С. Степин отмечает, что ориентация современного научного знания на постижение особенностей самоорганизующихся и саморазвивающихся систем требует «поставить в новом свете проблему целевой причинности» и развивать более «расширенное» представление о детерминизме[25].

Некоторыми исследователями предлагается использовать категорию цели для характеристики особого класса природных систем. Так, В.А. Красилов считает, что все открытые термодинамические системы могут «рассматриваться как телеологические, стремящиеся к определенному состоянию, которое и является целью их развития. Например, биотическое сообщество, проходящее в своем развитии серию промежуточных стадий, стремится к климаксному состоянию, выступающему в качестве цели»[26].

Свое дальнейшее исследование мы посвятим анализу сущности целенаправленности развития живого. При этом особое внимание уделим выявлению объективного характера цели и целевой причины, места последней в системе органического детерминизма.

Целенаправленность развития в наибольшей степени характерна для организменного уровня организации жизни. Она проявляется в структурных и физиологических изменениях живого. Особенно зримо она выступает в поведении живого. Как писал Э. Майр, «птица, начинающая свой перелет; насекомое, находящее свое растение-хозяина; животное, спасающееся от хищника; самец, старающийся привлечь внимание самки, – все они действуют целенаправленно»[27]. Характер этих действий у каждого организма соответствующим образом запрограммирован в их генетических структурах. Кроме того, осуществление целенаправленных действий будет означать и решение организмом определенных целей. «При наличии генетически запрограммированной целесообразности все формы жизни от мо-

[24] Фесенкова Л.В. Методологические возможности биологии в построении новой парадигмы // Методология биологии: новые идеи (синергетика, семиотика, коэволюция). – М., 2001. – С. 42.
[25] Степин В.С. О философских основаниях синергетики // Синергетическая парадигма: Синергетика образования. – М., 2007. – С. 102.
[26] Красилов В.А. Охрана природы: принципы, проблемы, приоритеты. – М., 1992. – С. 27.
[27] Майр Э. Причина и следствие в биологии // На пути к теоретической биологии. – М., 1970. – С. 52.

лекулярного до организменного уровня оказываются в состоянии решать целевые задачи, без чего невозможна жизнь»[28].

В живом эти «целевые задачи» выступают в форме генетической информации. В ней зафиксировано прошлое, историческое развитие организма, опыт взаимодействия многих поколений данного вида организмов со средой. Но генетическая информация организма не только следствие его прошлого, она обращена в будущее. Связывая прошлое, настоящее и будущее организма, она является носителем и выражением биологической цели. Целенаправленность развития организма и его поведения есть не что иное, как реализация выработанной им цели. Ее осуществление достигается только при совершении организмом определенных направленных действий. Поскольку эти действия запрограммированы, то биологическая цель выступает в форме той причины, которая направляет процессы развития живого. В этом отношении можно сказать, что в живом цель проявляет себя в специфической форме причинности. Здесь она выступает как целевая причина.

Целевую причину нельзя понимать как форму влияния будущих состояний живого на настоящие. В целевой причине или генетической информации кодируется не конечный результат развития, а процесс его движения к определенным результатам. В силу этого последние не могут выступать в качестве детерминирующих факторов развития. Будущее, или цель развития, есть результат прошлого и настоящего развития. При этом особое значение имеет прошлое (историческое) развитие. Оно является одной из причин развития системы в ее настоящее время. Прошлое конечное состояние живой системы выступает одним из тех факторов, который определяет характер ее развития в настоящем и возможность достижения своего будущего, конечного состояния.

Это свойство живой системы быть зависимой от ее прошлого развития в своем движении к определенному конечному состоянию, к которому система стремится в онтогенезе, как своей «цели», отражает целенаправленный или телеономический характер развития живого. Причем своего конечного состояния развивающийся организм достигает, опираясь на запрограммированный в его генотипе «опыт» прошлого развития, «опыт» прошлых взаимосвязей с факторами внешней среды. В этом отношении онтогенез всегда носит целенаправленный (телеономический) характер.

Направленность процессов развития живого детерминирует целевая причина. Но «опыт» прошлого развития живой системы зафиксирован в ее генотипе. Вот почему он и выступает в качестве целевой причины. А материальным носителем этой причины являются молекулы ДНК, генетический код. Такой вывод находится в соответствии с результатами современного биологического познания.

[28] Дубинин Н.П. Общая генетика. – М., 1970. – С. 440.

Генетическая информация, или целевая причина, определяет развитие организма по выработанной его прошлым (историческим) развитием программе на основе структурных преобразований элементов, действием которых организм способен преодолевать возмущающие воздействия среды, которые стремятся отклонить систему от ее целенаправленного развития. Эта способность системы сохранять целенаправленный характер развития есть свидетельство ее целесообразной организации. Она обеспечивает своеобразие взаимодействия живой системы со средой. Способность организма опосредовать воздействие внешних факторов осуществляется на основе сложной системы обратных связей. «Являясь информационной причиной деятельности кибернетической системы, цель в обычной, вероятностной (стохастической) среде может быть достигнута лишь путем использования обратной связи, так как при этом необходимо получать осведомительную информацию о ходе достижения цели по каналам обратной связи и соответственно посылать корректирующую информацию по каналам прямой связи»[29]. Как отмечал далее Н.И. Жуков, наличие механизмов обратных связей является необходимым условием и средством достижения системой своей цели. У живых систем имеются самые разнообразные формы обратных связей. Уже на молекулярном уровне их организации через обратные связи осуществляется аллостерическая регуляция синтеза веществ в клетке, регуляция генной активности и т. д.

Наличие механизмов обратной связи обнаруживается во всяком направленном процессе активного приспособления, связанного с выбором оптимального варианта изменения структурных и функциональных свойств системы. Поскольку при помощи механизмов обратной связи осуществляется приспособление системы к тем или иным условиям среды, постольку системы с обратными связями можно характеризовать как целесообразные. В таких системах устанавливается соответствие между результатом деятельности системы и процессами, которые обеспечивают этот результат.

Обратные связи – это информационно-вещественные связи между функционирующими элементами кибернетической системы и системы со средой. В живых системах обратные связи отражают не только зависимости между функционирующими компонентами системы в их настоящем, но и зависимости от тех функций, которые осуществлялись в историческом прошлом (филогенетическом развитии) системы. В этом смысле обратные связи в живой системе являются в некоторой степени фиксированными.

С информационной точки зрения обратные связи в живой системе предетерминированы или фиксированы в норме реакций генотипа. В этом и состоит качественное отличие механизмов обратной связи в живой системе от обратных связей в самоуправляющихся технических системах.

[29] Жуков Н.И. Философские основания кибернетики. – М., 1985. – С . 34.

Вследствие фиксированности обратных связей в генотипе организма создаются устойчивые механизмы развития, обеспечивающие его надежность даже при наличии некоторых отклонений от нормальных условий внешней среды. Живые системы не подчиняются пассивно влиянию внешних факторов. Они активно противодействуют им, следуя своим собственным законам, определяемым исторически сложившейся организацией с ее нормой реакции.

Эти особенности организма, его развития, запрограммированы в генетических структурах в форме генетической информации, или целевой причины. В них фиксируется не только опыт прошлого (филогенетического) развития данного вида организмов, но и возможности его реализации в настоящем и будущем. Прошлое развитие организма является одной из причин его развития в настоящем и будущем. Но прошлое не однозначно определяет настоящее и будущее. Как справедливо писал С.Т. Мелюхин, «однозначной детерминации будущего прошлым в мире нет, детерминация имеет вероятностный характер»[30]. Отсюда становится ясным, что рациональное истолкование целевой причины несовместимо с представлением о ее однозначности и прямолинейности. Целевая причина как фактор, определяющий направленность развития, содержит в себе возможность выбора поведения, а поэтому реализация цели в развивающейся живой системе носит вероятностный характер. Реализация цели «происходит в порядке стохастического процесса, означающего своего рода «блуждание» в некотором поле возможностей. И если блуждание в большинстве случаев завершается достижением результата, ведущего к сохранению и продолжению жизни, то это в значительной мере объясняется действием механизмов обратной связи»[31].

Целенаправленный характер развития живого носит стохастический процесс выбора наиболее вероятных для него состояний в меняющихся условиях среды. Этим самым исследование сущности целенаправленного развития живого требует использования вероятностного подхода, категории вероятности. В настоящее время вероятностный подход в наибольшей мере используется при исследовании закономерностей исторического развития живого. Но такой подход необходим и при исследовании закономерностей индивидуального развития организма.

Исследование механизмов целенаправленного развития живого приводит к вычленению целевой причины, информационных, вероятностных и других форм связей. Анализ их места и роли в процессах развития живого способствовал обоснованию концепции вероятностного детерминизма в эволюционной биологии и органического детерминизма в сфере жизни.

---

[30] Мелюхин С.Т. Диалектика единства и многообразия свойств пространства и времени // Философские проблемы естествознания. – М., 1985. – С. 228.

[31] Волкова Э.В., Филюков А.И., Водопьянов П.А. Детерминация эволюционного процесса. – Мн., 1971. – С. 81.

Как показано в работах А.И. Филюкова и И.Т. Фролова, эти формы детерминизма существенно обогащают и конкретизируют диалектико-материалистический принцип детерминизма. В этой связи нельзя согласиться с выводом, что попытки «модернизировать» концепцию детерминизма «путем введения представлений о «вероятностной», «информационной», «целевой» и тому подобных «причинах»... не дало положительных результатов»[32]. Именно выявление роли такого рода причин в процессах детерминации живого способствует развитию и конкретизации принципа детерминизма. Более того, их анализ позволяет раскрыть многообразные формы связей в живом и в его взаимоотношениях со средой.

Среди них особое значение имеет выявление различных типов случайностей в детерминации целенаправленного развития. Его необходимый характер осуществляется, прежде всего, при наличии связей развивающегося организма с факторами внешней среды. Вступит во взаимодействие с теми или иными факторами среды организм или не вступит – все это подвержено изменениям. Взаимодействие может произойти так, а может произойти иначе или совсем не произойти. Все это носит случайный характер. Однако внешняя среда является одним из необходимых факторов развития организма. Экспериментальный анализ эмбрионального развития позвоночных животных показывает, что «по отношению к каждому морфогенетическому акту, каждому множественному механизму развития, среда выступает не как «шум», а как необходимый участник этого механизма»[33]. Через случайные связи организма со средой осуществляется необходимый характер его развития.

Но процесс познания механизмов целенаправленного развития живого не может ограничиться выявлением только внешних, случайных связей. Случайности имеют как внешнюю, так и внутреннюю обусловленность. Последний тип случайных связей следует также учитывать при анализе процессов развития живого. Их проявление в развивающемся организме связано с системным характером развития, наличием множества взаимодействующих элементов. Их взаимодействия могут быть и случайными. Такие случайности обусловливаются специфическими внутренними процессами, протекающими в развивающемся организме.

Например, образование некоторых тканей организма в его эмбриональном развитии зависит от направления миграции отдельных клеток или групп клеток из одной части зародыша в другую. Миграция клеток в первичных полостях зародыша – необходимое условие формообразовательного процесса. Но реализация возможностей мигрирующих клеток для специфической дифференцировки и образования тканевых структур зависит

---

[32] Огородников В.П. Познание необходимости. – М., 1985. – С. 52.

[33] Лопашов Г.В. Эмбриология и кибернетика // Клеточная дифференцировка и индукционные механизмы. – М., 1965. – С. 257.

от окружения клеток и их локализации относительно первичных зачатков зародыша. Однако все эти факторы являются случайными для клетки, которая предназначена для дифференцировки и образования специфической ткани. Мигрируя в полостях зародыша, клетка может случайно оказаться в том или ином окружении, вступить во взаимодействие с тем или иным участком первичного зачатка. Но если взаимодействие мигрирующих клеток с определенными участками зачатков зародыша начнется, то уже с необходимостью их последующее развитие приведет к образованию специфической ткани. Изменения (дифференцировка) клеток, вступивших во взаимодействие при их случайных связях, образуют необходимую последовательность событий.

В явлениях эмбрионального развития организма обнаруживается, что «причинности момент случайности присущ столь же органично, как и момент необходимости»[34]. Случайные и необходимые взаимодействия структур развивающегося организма составляют основу формообразовательного процесса. В результате различных взаимодействий за период эмбрионального развития организма происходят все возможные формообразовательные акты, которые необходимы для становления его целостной организации. Эта необходимость прокладывает себе путь через различные типы случайности и благодаря им.

Но возможности развития организма заложены в его генетических структурах в форме генетической информации или целевой причины. Реализация этих возможностей есть процесс реализации целевой причины. Через взаимодействия структур живой системы и системы со средой происходит раскодирование генетической информации и становление действительной организации живого. Анализ реальных связей, имеющих место в развитии живого, свидетельствует, что его необходимый и целенаправленный характер осуществляется в процессах реализации возможности в действительность. Этим самым необходимость предстает как «единство возможности и действительности»[35]. Единство реальной возможности генотипа и действительности процессов его реализации лежит в основе необходимого характера развития организма. В свою очередь необходимость является выражением целенаправленного развития живого.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что целевая причина раскрывает свое содержание через другие типы связей. Тем самым она находится не только в рамках органического детерминизма, но и существенно обогащает его. Вероятностный характер реализации целей в живом свидетельствует и о том, что органический детерминизм является, по своей сути, вероятностным детерминизмом. Вот почему мы не видим

[34] Материалистическая диалектика: в 5 т. Т. 1. Объективная диалектика. – М., 1981.— С. 215.
[35] Широканов Д.И. Необходимое и случайное // Материалистическая диалектика. Законы и категории. – Ташкент, 1982. – С. 217.

необходимости ставить вопрос о признании парадигмального статуса целевой причинности. На наш взгляд, такой необходимости нет. Все содержание этой формы причинности может быть выявлено в системе органического детерминизма. В нем фиксируется, прежде всего, своеобразный характер развития живого и его взаимоотношения со средой своего обитания.

Универсальность детерминистской парадигмы

Сформулированная Вернадским новая детерминистская стратегия познания живого на различных уровнях его организации оказалась весьма результативной. Ее реализация исследователями живого способствовала не только сближению биологии с физикой и химией, но и раскрытию универсальности статистических закономерностей, их вероятностного характера выражения. Детерминистская парадигма входит в саму ткань научного познания. Причем сами естествоиспытатели показали ее методологическую ценность в познании исследуемых ими объектов и явлений природы. В этом отношении мы вновь соглашаемся с утверждением Ю.В. Сачкова, что «вероятность лежит на магистральных путях развития науки». Но далее он отмечает, что вероятностная установка «еще не ассимилирована должным образом современным учением о бытии и познании, не ассимилирована нашим мировоззрением»[36].

Такая ситуация с освоением важнейшей парадигмы современной науки связана, на наш взгляд, с низким уровнем философской культуры нынешних представителей науки, особенно научной молодежи. Вот почему в процессе подготовки кадров науки следует обращать более пристальное внимание на усвоение ими уже утвердившихся методологических основ научного знания. Важность осмысления и усвоения ими рассматриваемой методологической установки определяется, в том числе, тем, что в научной литературе стали высказываться положения о «кризисе детерминизма», «отходе» современного научного знания от детерминизма и утверждения в нем индетерминизма. При этом указывается, что фактором данного процесса выступает синергетика и формируемый ею нелинейный стиль мышления в науке. Наиболее последовательно данную точку зрения отстаивают С.А. Лебедев и И.К. Кудрявцев. Они считают, что «с философских позиций нелинейность современной науки означает все более четкий ее отход от детерминистских взглядов на мир как универсально истинных и дополнение их индетерминизмом, утверждающим фундаментальную и вместе с тем конструктивную роль случайности в структуре и эволюции реальных систем»[37]. Из цитируемого положения можно сделать вывод, что становление синергетики приводит к «отходу» научного знания от совре-

[36] Сачков Ю.В. Вероятностная революция в науке. – С. 9.

[37] Лебедев С.А., Кудрявцев И.К. Детерминизм и индетерминизм в развитии естествознания // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. – 2005 – № 6.—С.18.

менного детерминизма и его положений об объективности и многообразии форм причинных связей. Ведь индетерминизм и есть отрицание данного положения, а следовательно, и роли причинного объяснения в науке. В связи с этим возникает вопрос: в каком отношении находятся синергетика и современный детерминизм?

Ответ на поставленный вопрос можно получить при анализе некоторых выводов создателей синергетики. Об отношении И. Пригожина к современному вероятностному детерминизму мы уже писали. Его по праву следует считать не только сторонником такого детерминизма, но и тем ученым, который показал универсальность детерминистской парадигмы в постижении природных и социальных систем. Здесь будет уместным анализ некоторых положений современного физика Г. Хакена, внесшего значительный вклад в обоснование синергетики. В теме нашего исследования первостепенное значение имеет объяснение им принципов работы лазерной установки. Г. Хакен выявил, что при увеличении силы тока, подаваемого в лазерную трубку, находящиеся в ней атомы газа приходят в возбужденное состояние и начинают испускать световые волны. Дальнейшее увеличение силы тока приводит к тому, что эти отдельные волны накладываются друг на друга, в результате чего получается синхронизированное по фазе световое излучение. Складывающиеся в этом процессе взаимосвязи между отдельными световыми волнами и общим световым потоком названы Хакеном *циклической причинностью*. Механизм ее порождения и действия связан с тем, что в лазере «с одной стороны, световая волна (параметр порядка) подчиняет себе атомы; с другой стороны, эта же волна (параметр порядка) сама оказывается результатом взаимодействия отдельных атомов»[38]. В другой работе отмеченную форму взаимосвязей в лазере он называет *круговой причинностью*[39]. Различия между названными Хакеном формами причинности мы не видим. Последняя по своей сущности есть циклическая причинность. Она имеет место во всех самоорганизующихся системах – от лазера до работы мозга человека.

Следующей важной особенностью работы лазера является то, что при дальнейшем увеличении подаваемого в него тока световое излучение становится совершенно неупорядоченным. Световые вспышки вырождаются в неупорядоченное движение, которое Хакен называет *детерминированным хаосом*. Оно представляет собою нерегулярное, хаотическое движение отдельных излучений атомов газа и однозначно определено исходной причиной – увеличивающейся силой тока. Но состояние детерминированного хаоса весьма характерно для многих природных систем. В настоящее время данное явление становится предметом познания ряда научных дисциплин (физика, химия и т. д.).

[38] Хакен Г., Хакен-Крелль М. Тайны восприятия. – М., 2002. – С. 30.
[39] Хакен Г. Принципы работы головного мозга. – М., 2001. – С. 51.

Таким образом, анализ работы лазера показывает, что при действии на него одного и того же фактора (силы тока), но разной степени интенсивности, одна и та же система ведет себя качественно различно. Подобные изменения весьма часто встречаются в природе. Особенно характерны они для нелинейных систем. На выявление их сущности, выявление закономерностей осуществляющихся в них процессов и ориентируется синергетика. А вскрытая ею новая форма причинной связи и состояния детерминированного хаоса может быть еще одним свидетельством объективности причинной связи и ее проявления в разных формах. Причем циклическая причинность раскрывает свою сущность через случайные связи. Все это означает, что познание самоорганизующихся систем может осуществляться только на методологической основе современного детерминизма. Синергетика не только не отрицает новейшую форму детерминизма, а наоборот, подтверждает ее универсальную выраженность и парадигмальный статус в современной науке.

Детерминистская парадигма ориентирует познавательный процесс на выявление различных форм связей, взаимообусловленностей предметов и явлений объективного мира, опосредованности этих связей самими исследуемыми предметами и явлениями. Такая стратегия познания позволяет наиболее полно отразить реальную картину этого мира и его отдельных компонентов. А обращение исследователей к анализу сложных самоорганизующихся и развивающихся систем приводит к «расширению» детерминистской парадигмы в современной системе научной рациональности и «включению» в число методологических установок науки целевой и других форм причинности.

А.Н. Кочергин
(Москва)

МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

В статье рассматриваются проблемы и перспективы использования искусственного интеллекта в развитии и обосновании математики. Проблема приемлемости математических доказательств, задействующих ЭВМ, связывается с перспективами развития науки и человеческого знания вообще.

Новации в науке могут быть следствием появления новых методов, постановки новых теоретических и практических задач и т. п. В частности, открытие «новых миров», то есть обнаружение новых объектов, вызывает изменение старых и формирование новых программ исследования. Примерами «новых миров» в математике можно считать иррациональные числа, отрицательные числа, комплексные числа, дифференциальное и интегральное исчисления, математическую логику, функциональные пространства, программирование и т. д. Построение новых математических объектов – не единственный вид «новых миров» в математике. Обнаружение противоречий в математике и развертывание работ по ее обоснованию также может быть отнесено к «новым мирам», породившим целый ряд исследовательских программ. Использование систем искусственного интеллекта в доказательстве теорем – еще одно открытие «новых миров», заставившее по-новому взглянуть на старые вопросы: что такое искусственный интеллект? что такое математика? что такое доказательство? можно ли считать приемлемым математическое доказательство, если оно выполнено с помощью системы искусственного интеллекта? и т. п. – и поставить вопрос о доказательстве теорем с помощью систем искусственного интеллекта как одном из возможных направлений в формировании нетрадиционной научно-исследовательской программы.

Ключевым для ответа на поставленные вопросы является понятие искусственного интеллекта. При всем разнообразии трактовок этого понятия общим для многих из них является признание того, что системы искусственного интеллекта моделируют функции человеческого мышления. При этом моделирование понимается не как воспроизведение мыслительных функций, а как их имитация[1]. Воспроизводить – значит воссоздавать то, что было или есть, то есть при воспроизведении воссоздаются свойства, в совокупности сохраняющие сущность прототипа на всех его уровнях (субстратном, структурном, функциональном). Н. Винер и А. Розенблют не

[1] Kochergin A.N. «Simon syndrome» as a problem of methodology and philosophy of science // Logic, methodology and philosophy of science: Papers of soviet scientists submitted to the soviet national organization committee for the VII international congress on logic, methodology and philosophy of science. Austria, Salzburg, 11-16 July 1983. M., 1983.

случайно определяли моделирование через representation (подобие), а не через reproduction (воспроизведение)[2]. Такое понимание моделирования мышления позволило некорректно сформулированную проблему «может ли машина мыслить?» перевести в форму «какие мыслительные функции можно моделировать?», в рамках которой психические процессы рассматриваются как частная форма информационных процессов. Однако и подобный подход к психике встретил возражения части психологов.

Мозг является сложной самоуправляющейся информационной системой. Если учесть, что управление строится на основе переработки информации, то доминирующая роль информационных процессов в деятельности мозга становится понятной. Однако, хотя информационные процессы и являются существенной стороной психики, моделирование которых дает ключ к пониманию структур психических явлений, трудно объяснить все особенности психических феноменов с позиции лишь какого-то одного принципа. Так, например, на весьма существенные трудности наталкивается описание психических актов, связанных с эстетической деятельностью. Имеются данные о том, что в эстетической деятельности информационный процесс протекает иначе, чем в познавательной. О.К. Тихомировым описан ряд функциональных механизмов, от которых, по его мнению, отвлекается информационный подход и которые должны быть объектом собственно психологического анализа: «характеристики операционального смысла ситуации для решающего, смысла конкретных попыток решения, смысла переобследования, смысла отдельных элементов в ситуации и отличие от их объективного значения; характеристики процессов возникновения и развития смыслов одних и тех же элементов ситуации и ситуации в целом на разных стадиях процесса решения задачи, соотношение невербализованных и вербализованных смыслов различного рода образований в ходе решения задачи; процессы взаимодействия смысловых образований, роль смысловых образований в организации исследовательской деятельности, в определении ее объема (избирательности) и направленности; процесс возникновения и удовлетворения поисковых потребностей; изменение субъективной ценности, значимости одних и тех же элементов ситуации и действий, выражающееся в изменении их эмоциональной окраски (при константной мотивации); роль меняющейся шкалы субъективных ценностей в организации протекания поиска; формирование, динамика личностного смысла ситуации задачи и его роль в организации деятельности по решению задачи»[3]. Действительно, приведенные данные ставят под сомнение «обоснованность критерия количества перерабатываемой информации как основного фактора, создающего трудность в решаемой задаче»[4] – необходимо учитывать «такие реальные функциональные образования, как

---

[2] Rosenblueth and Wiener N. The Role of Models in Science // Philosophy of Science. 1945, vol. 12. – P. 317.

[3] Тихомиров О.К. Структура мыслительной деятельности человека. – М., 1969. – С. 296–297.

[4] Там же. – С. 231.

смысл (операциональный и личностный) и ценность информации…»[5]. Однако все это говорит об ограничении шенноновской теории информации, оперирующей понятием «количества информации», но не о принципиальной невозможности описания психических явлений в терминах концепции информации вообще. Понимание психики как информационного процесса дает возможность ее изучения с более широких позиций. Кроме того, «просвечивание» специфики общим позволяет эту специфику рассматривать более основательно. Д.И. Дубровским достаточно убедительно обосновано, что информационный подход позволяет не только уяснить в общем сущность субъективных феноменов, но и конкретизирует две важные взаимосвязанные проблемы: проблему расшифровки нейродинамического кода и проблему объяснения управляющей функции субъективных феноменов на уровне личности[6]. Переработка информации – не синоним мышления, хотя любой познавательный акт есть процесс переработки информации. Но игнорирование информационной стороны мышления не дает возможности понять, как субъективные феномены влияют на физические процессы. Речь идет не о воспроизведении мышления, а о его имитации, то есть о приравнивании информационных и психических процессов на уровне определенной абстракции, не снимающем задачи выявления специфики переработки информации человеком. Иначе говоря, информационное объяснение психики вовсе не исключает ее объяснения в иных аспектах.

Следует, однако, признать, что возражения против информационного подхода к психике, сформулированные О.К. Тихомировым, не столь просты, чтобы быть опровергнутыми приведенными выше соображениями. Вопрос может быть поставлен так: в какой системе понятий сравнивать функционирование мозга и ЭВМ, что дает для психологии знание закономерностей переработки информации? Конечно, всякая психическая деятельность есть деятельность информационная, но не всякая информационная деятельность является деятельностью психической. Мозг и ЭВМ, моделирующая работу мозга, являются информационными системами – с позиции теории информации описываются общие для мозга и ЭВМ процессы. Кроме того, та и другая системы имеют какие-то специфические черты, отличающие их друг от друга. Таким образом, психика есть информация плюс нечто, это и составляет специфику, свойственную лишь психическому. Если в предмет психологической науки включать лишь эту «специфику», то, естественно, изучение ее с позиции информационных процессов ничего не даст (вопрос, как видно, упирается в неразработанность самой проблемы предмета психологии). Поэтому с позиции психологии теория, например мышления, фиксирующая лишь те стороны мышления, которые являются общими для него и ЭВМ, действительно является существенно

[5] Там же. – С. 297.
[6] Дубровский Д.И. Психические явления и мозг. – М., 1971. – С. 277.

неполной. Но ведь никто не требует, например, от ножа быть одновременно и пилой. Точно так же, вообще говоря, не имеет смысла требовать от теории, объясняющей одну сторону объекта, одновременно объяснять и другую сторону, находящуюся в «юрисдикции» другой теории. Аргументация сторонников необходимости включения в одну теорию объяснения и тех сторон, для объяснения которых существуют другие теории, применительно к обсуждаемой проблеме такова: игнорирование смысловой стороны при исследовании мышления означает уход от собственно психологического исследования, следовательно, исследование с позиций концепции информации не есть исследование психологическое. Однако такое рассуждение справедливо лишь с позиций традиционной психологии, не включавшей в свой предмет информационный аспект психики. С позиции информационного подхода к психике предмет психологии должен быть уточнен за счет включения в него информационного аспекта психики.

«Специфичность» психики (предметная соотнесенность с внешним миром, субъективность, активность и т. д.) не может существовать «сама по себе», не основываясь на процессах переработки информации. Утверждать, что мышление является категорией психологической, а информация – категорией кибернетической, не совсем точно. Выделение специфического, свойственного лишь для человеческой психики, безусловно, важно и необходимо. Но важно и знание общего. Конечно, общие понятия отвлекаются от многообразия структур конкретного типа, но они могут направлять поиски конкретных структур. Поэтому есть резон в предложениях определять психологию как науку о сохранении информации в памяти человека, о возможности обращения человека к информации, хранимой в его памяти, о воздействии этой информации на принимаемые человеком решения и на его поступки[7]. Понять общее – не менее важная задача, чем понять специфическое, тем более что знание общего открывает новые перспективы в понимании фундаментальных структур, лежащих в основе познавательной деятельности человека. При этом, разумеется, не следует забывать и различий, поскольку познать специфику психики без знания конкретных механизмов и структур невозможно. Как показал П.К. Анохин, в живой системе информационный процесс в любом его звене содержит в себе в разных кодах черты и признаки исходного объекта, поскольку передача информации подчиняется закону: между начальным и конечным звеном передачи информации должна быть «точная и адекватная эквивалентность». Вся приспособительная деятельность живых систем оказывается возможной потому, что все воздействия внешнего мира «входят в организм в форме тончайших информационных процессов, весьма точно отражающих основные параметры этого объективного внешнего мира»[8]. Именно

[7] Ляпунов А.А. О рассмотрении биологии с позиции изучения живой природы как системы // Проблемы методологии системного исследования. – М., 1970. – С. 224.
[8] Анохин П.К. Теория отражения в современной науке о мозге. – М., 1970. – С. 46.

поэтому анализ психических функций мозга можно проводить с позиции концепции информации. Нервная система, как известно, осуществляет в организме функцию управления. Управление же без информации невозможно – процесс управления есть процесс информационный.

Свести полностью психическую деятельность к разнообразным электро-нейрофизиологическим процессам, имеющим, по существу, дискретный характер, конечно, нельзя. Основная характеристика психической деятельности – это синтетическое восприятие, то есть универсальная целостность внутреннего мира, его способность охватить и создать что-то, по существу, непрерывное. Психика синтезирует из дискретных сигналов (оптических, акустических, тактильных и т. д.) непрерывные образы внешнего мира. Это относится также к образам, созданным во «внутреннем мире» (картина в воображении художника, музыка – композитора и т.д.), то есть субъективность психики не исчерпывается информационным ее аспектом. Субъективность дана в интроспекции, всякое описание субъективного означает его объективацию. С позиции концепции информации понять субъективное так же трудно, как, например, понять творчество Ф. М. Достоевского, не привлекая в предмет исследования ничего, кроме словаря и грамматики русского языка, – всегда будут исчезать уникальные моменты психической деятельности, для выражения которых (а не наоборот) только и существуют правила, знаки. Можно сказать, что психика есть информация плюс субъективное. Но это не означает, что в принципе невозможно расшифровать (хотя бы вероятностно) коды даже самой сложной психической структуры – психика вообще становится предметом изучения лишь в том объеме, в каком она выявлена в информационных процессах.

Однако специфика той частной формы информации, которая реализуется в психических актах, не может быть объяснена при полном абстрагировании от энергетических компонентов этих актов – для этого необходимо учитывать взаимосвязь информационных и энергетических аспектов психической деятельности. Некоторые свойства психики, возможно, являются по своей природе энергетическими (например, утомляемость и некоторые аномалии психической деятельности при перегрузках). Можно предположить, что эмоции управляют прежде всего энергетическими процессами психики, обеспечивая их активизацию или торможение. В целом для психической деятельности информационный аспект, видимо, доминирует над энергетическим, но последний является необходимым условием первого. Вполне возможно, что будут обнаружены новые универсальные принципы, увязывающие информационные и энергетические характеристики.

Смысл возражений против использования концепции информации в изучении психики сводится к тому, что нельзя использовать эту концепцию там, где вопрос о смысле, значении, ценности и истинности сигналов имеет первостепенное значение, то есть, иными словами, нельзя абсолютизировать универсализм этой концепции. Применение концепции информации в иных областях, по сравнению с теми, для нужд которых она была сформулирована, оказалось делом несравненно более трудным, чем простой перенос терминов концепции информации из одной области знания в другую. Действительно, понятие информации в том смысле, какой был ему придан К. Шенноном (как количественная характеристика процессов управления и регуляции), оказалось недостаточным для понимания даже самого существа информационных процессов в живых системах, поскольку не учитывает их качественного аспекта. Живые системы оказались более «требовательными» к содержанию понятия информации, поскольку «количество информации», которым оперирует шенноновская теория информации, для изучения живых систем оказалось малопродуктивным – для них главное значение приобретает качество информации, ее полезность. Получая информацию из внешней среды, организм должен прежде всего оценить ее качественно, иначе он не сможет приспособиться к внешней среде. В этих условиях возникает задача такого развития концепции информации, которое преодолело бы ограниченность его прежнего состояния. Шенноновский вариант теории информации не учитывает смысла и ценности сигналов, несущих информацию, то есть не включает в себя семантический и прагматический аспекты. Описывая количество информации на языке символов и статистических соотношений, она выступает как синтаксическая теория. Для уточнения роли информационных процессов в психической деятельности имеет смысл сформулировать вопрос в следующем виде: какие изменения следует внести в определение понятия информации, чтобы при его помощи можно было бы понять те стороны психики, которые не находят объяснения в рамках шенноновской теории информации. Объяснение психической деятельности будет углубляться по мере уточнения понятия информации. Итак, будем исходить из того, что в принципе моделирование психики должно представлять собой не простое «отношение к ближайшему классу», не интерпретацию психики в терминах технической кибернетики, а разработку систем искусственного интеллекта, позволяющих имитировать (не воспроизводить!) сложные психические функции, включая творческие.

Доказательство теорем – деятельность творческая. Ван Хао, как известно, удалось ее промоделировать, причем были доказаны заново не только теоремы, содержащиеся в «Принципах математики» Уайтхеда и Рассела, но и ряд новых теорем. Известны программа В.М. Глушкова по проверке доказательств теорем алгебры, программа для доказательства или опровержения теории на основе алгоритма А. Тарского. Известны также успешные шаги в области моделирования некоторых творческих задач, связанных с сочинением музыки, стихов, определения авторства произведений и т. д. Число таких задач постоянно расширяется. При этом утверждения о том, что ЭВМ не дает нового знания, не могут считаться справедливыми. Если считать новым то, что не было предусмотрено конструктором и что ему не было известно, то можно сказать, что ЭВМ действительно выдает нечто новое. В этом отношении показательно использование систем искусственного интеллекта для доказательства теоремы, известной как теорема четырех красок (ТЧК).

ТЧК была сформулирована Фрэнсисом Гутри в 1852 году. Им было высказано предположение, что любую географическую карту, изображенную на листе бумаги, можно раскрасить в четыре цвета таким образом, чтобы страны, имеющие общую границу, были раскрашены в разные цвета. Последовавшие за этим попытки математиков обосновать эту догадку более столетия оказывались безуспешными. Вместе с тем развитие математики породило у многих математиков конца XIX века уверенность в том, что на любой вопрос, сформулированный на языке математики, может быть дан ответ, если будут использованы достаточно мощные математические идеи, и что любой компетентный математик может проверить правильность решения задачи в разумный промежуток времени. Однако полученные в 30-е годы XX столетия К. Геделем и А. Черчем результаты свидетельствовали, что существуют утверждения, истинность или ложность которых не может быть доказана в рамках данной системы, и что в системе могут быть теоремы, доказательство которых не может быть записано в разумный промежуток времени. Эти выводы были использованы одними математиками для заключения о том, что ТЧК не может быть ни доказана, ни опровергнута, а другими – для заключения о невозможности записать доказательство, даже если оно существует, в разумный период времени.

Часть математиков не теряла надежды найти решение ТЧК. Результаты, полученные А. Кемпе и П. Хивудом в XIX веке, а также Д. Биркгофом и Ф. Франклином в XX веке, послужили тем фундаментом, который позволил Г. Хишу формализовать известные методы доказательства сводимости конфигураций и показать, что, по крайней мере, один из них (прямое обобщение метода, использованного А. Кемпе) представляет собой процедуру, которую может осуществить ЭВМ[9]. Теория сводимых конфигураций, развитая Г. Хишем, к концу 80-х годов XX века позволила уяснить необходимые для доказательства ТЧК идеи сводимости. Однако на пути доказательства ТЧК стояли еще два препятствия: недостаточный для доказательства ТЧК объем памяти существующих ЭВМ и неясность того, каков должен быть верхний предел необходимости для доказательства ТЧК сводимых конфигураций. Решающий шаг был сделан К. Аппелем и В. Хакеном.

Вначале К. Аппелем и В. Хакеном было найдено множество сводимых конфигураций, «размер кольца которых был достаточно мал, чтобы машинное время на доказательство сводимости было в пределах разумно-

---

[9] Appel K., Haken W. The solution of the colour map problem // Sci. Amer. 1977, vol. CXXXVII, N 10.

го»[10]. Это позволило к концу 1972 года составить машинную программу, позволившую в конце 1976 года доказать ТЧК (на что потребовалось 1200 часов машинного времени трех ЭВМ). Таким образом, совершенствование ЭВМ свидетельствует о возможности таких доказательств математических утверждений, строгость которых будет велика, но которые не будут поддаваться непосредственной проверке человеком.

Многие математики исходят из того, что доказательство должно обладать такими характеристиками, как убедительность, обозримость и формальность. Убедительность доказательства – это свидетельство понимания математики как человеческой деятельности. Обозримость же – это свидетельство возможности обозреть (проверить) доказательство во всей его полноте. Обозримость конкретизирует убедительность, связывая процесс доказательства с его субъектом. Традиционно источником убедительности доказательства считается его ясность, то есть возможность проверить его квалифицированным математиком без использования систем искусственного интеллекта, хотя некоторые доказательства могут быть весьма длинными и потребовать много сил и времени. Формальность доказательства означает представимость его в виде конечной последовательности формальной теории, удовлетворяющей некоторым условиям, то есть это вывод из аксиом теории с помощью правил логики. Формализованность доказательства в свою очередь конкретизирует обозримость, разбивая ее на конечные обозримые модели.

Известно, что не существует системы, в которой любое доказательство может быть формализовано, поэтому формализованность называют локальной характеристикой доказательства, а не глобальной. Но, как было показано Р. Томом, для любого доказательства существует некоторая подходящая формальная система, в которой оно может быть формализовано. Однако все ли формализованные доказательства обозримы? Существуют формализованные доказательства, которые не могут быть обозримы вследствие ограниченности человеческой жизни. Поэтому возможны формализованные утверждения без обозримого доказательства. Иными словами, формализованные доказательства могут выходить за пределы обозримых доказательств. На практике же математики обычно приходят к знанию формального доказательства только через посредство обозримых доказательств. Формальные доказательства либо достаточно просты, чтобы быть обозримыми и проверенными, либо их существование устанавливается с помощью неформальных обозримых доказательств. Что касается признания доказательства формальными без их обозримости, то нет полной ясности относительно того, как это делают математики[11].

Понятия математической строгости и математического доказательства не оставались неизменными. Практика предъявляла все более высокие тре-

---

[10] ibid. –P. 115.

[11] Tymoczko T. The four-colour problem and its philosophical significance // J. Philos. 1979, vol. LXXVI, N 2.

бования к надежности математических средств. Поэтому математика шла по пути усиления строгости доказательств, когда на поставленный вопрос можно получить однозначный ответ. Это нашло свое выражение в превращении математики в дедуктивную науку на основе аксиоматического метода Гильберта. Но это не означало, что строгость и однозначность абсолютно утвердились в математике. В фундаменте математических дедуктивных теорий лежат неопределенные понятия, принятые интуитивно (элемент, точка, совокупность и т.д.). Другая причина нестрогости – некорректная постановка проблем из-за невыполнения необходимых требований к аксиомам, определениям и доказываемым утверждениям. Но и выполнение всех этих требований не снимает вопроса о непротиворечивости. В соответствии с теоремой Геделя в любой формальной системе содержатся такие высказывания, которые в ее рамках нельзя ни доказать, ни опровергнуть. И хотя в рамках математики не содержится строгого доказательства ее непротиворечивости, принцип практики как критерия истинности человеческих знаний позволяет пользоваться математически нестрогими высказываниями.

Если математическое доказательство получено из определений и аксиом математической теории, удовлетворяющих необходимым требованиям в соответствии с правилами вывода в данной теории, то оно является строгим в классическом смысле. Поскольку при использовании ЭВМ мы не можем утверждать, что доказательство осуществлено в полном соответствии с правилами логического вывода, оно не может быть признано классически строгим. Но так как многократные прогонки программы и проверка вычислений с помощью ЭВМ уменьшают вероятность сбоя, доказательство с помощью ЭВМ может быть признано условно строгим, то есть строгим с некоторой вероятностью. Иными словами, строгим применительно к используемым средствам проверки. А это вполне согласуется с принципом практики как критерием истины. Такой подход к проблеме дает возможность расширить понятие классической строгости, не меняя определения классической корректности. Дальнейшее развертывание научно-технического прогресса будет постоянно выдвигать задачи, которые не могут быть непосредственно решены человеком. Без риска нет прогресса. И расширение понятия математической строгости даст возможности удовлетворять требованиям научно-технического прогресса в решении таких задач.

Таким образом, включение ЭВМ в процедуру математического доказательства вызывает изменение нормативов этой процедуры, ломку традиционных канонов философии математики. Осознание этого факта обусловливает возникновение нового представления о математической истине, но не в плане того, что математика в случае использования в доказательствах ЭВМ получает не истину, а в плане увязывания истины с нарастанием степени вероятности утверждений математики. Следует признать, что различие ситуаций с включением в процедуру доказательства ЭВМ и ситуаций с включением других технических средств (типа арифмометра) является принципиальным, так как в первом случае нет возможности проверить доказательство непосредственно человеком. Именно этим обстоятельством и был вызван пересмотр понятий математического доказательства и математической истины, развертывание новой, нетрадиционной научно-исследовательской программы в математике. Использование систем искусственного интеллекта в процессе доказательства приводит к тому, что происходит расширение средств доказательства: к чисто человеческому фактору добавляется машинный фактор, привносящий в толкование математической истины определенную долю вероятности, зависящую от уровня развития систем искусственного интеллекта и степени контроля их работы. Возможности математического эксперимента определяются не только непосредственно возможностями используемого аппарата, но и возможностями используемых в системах искусственного интеллекта элементов, их организации и технического воплощения. С дальнейшим совершенствованием систем искусственного интеллекта потребности и возможности создания новой, нетрадиционной научно-исследовательской программы в математике будут возрастать.

Анализ поставленной проблемы целесообразно связать с анализом природы мышления, то есть ввести его в контекст выявления принципиальных возможностей ограничений на использование систем искусственного интеллекта в процессе доказательства. И хотя мы (в пределах возможностей используемых для проверки средств) будем доверять полученным с помощью систем искусственного интеллекта данным, следует иметь в виду, что не любые акты мышления можно доверять этим системам. Если мы обращаемся к методологии мышления, то выходим в широкую социокультурную сферу, где нет места строгим формализациям и где большую эвристическую ценность имеют отдаленные сопоставления. Такими возможностями современные системы искусственного интеллекта не обладают. О возможностях будущих систем искусственного интеллекта мы можем только догадываться. Но важно быть готовым к любому повороту событий.

А.С. Левченко
(Курск)

ОНТО-ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО ИСТОЛКОВАНИЯ АРИФМЕТИКИ·

Статья посвящена интерпретации онтологических и теоретико-познавательных установок в интуиционистской программе обоснования математики. В работе рассматриваются содержательные компоненты истолкования интуиционистами исходных арифметических понятий.

Философско-математическое течение интуиционизма вместе с логицизмом и формализмом представляют собой в значительной степени изученные направления оснований математического знания. За время, прошедшее с открытия парадоксов теории множеств, исследования в русле трех указанных направлений вносят существенный вклад в развитие всего математического знания. Однако сформировавшиеся подходы к изучению каждого из названных течений и в настоящее время оставляют, на наш взгляд, нерешенным широкий круг проблем, связанных как с перспективами дальнейшего развития обоснования математики, так и с историко-философским осмыслением самих течений.

С нашей точки зрения, в качестве одного из перспективных подходов может выступать исследование онтологических и гносеологических аспектов истолкования фундаментальных основ математики в интуиционистском направлении. В качестве таких оснований нами приняты арифметическая, логическая и геометрическая составляющие. Будем считать, что эти несводимые друг к другу, но взаимосвязанные компоненты создают фундамент всего математического знания, а следовательно, их комплексное изучение в логицизме, формализме и интуиционизме позволит решить ряд новых вопросов и добиться новых результатов при дальнейшей разработке философских оснований математики[1].

В интуиционистском направлении философии математики арифметика предполагается в качестве фундаментальной основы построения всего математического знания, что позволяет глубоко изучить связь основных понятий арифметики в этом течении с процессом мышления и объективной реальностью. В качестве фундаментального понятия арифметики в трудах представителей интуиционизма (Л.Э.Я. Брауэра, Г. Вейля, А. Гейтинга) указаны понятия натурального числа, а так же следования в ряду натуральных чисел.

· Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00049а.

[1] О подобном подходе к изучению оснований математики см., например: Арепьев Е. И. О сущностном фундаменте математики и ее арифметической составляющей // Философская Россия 1/2006. – М.: Изд-во РУДН, 2006. – С. 99–108.

В своих работах («Интуиционизм. Введение» и «Интуиционистские взгляды на природу математики») А. Гейтинг рассматривает понятие натурального числа, утверждая, что число может быть определено только в том случае, когда для математика однозначно дан способ его вычисления. По мнению Гейтинга, невозможно исключить метафизику из понятия существования, если придавать этому понятию значение, выходящее за рамки принципа конструктивного построения. При этом задача математики заключается в абстрагировании от метафизики и изучении математических построений «как чего-то простого и непосредственного»[2].

Предполагая возможную критику основных положений интуиционистской программы, Гейтинг указывает, что кардинальный финитизм других программ в отношении понятия натурального числа, хотя и дает гарантии против различий в понимании этого термина, все же «влечет за собой отрицание понимания, которое трудно понять». По его словам, содержание понятия натурального числа было понятно и Евклиду, когда он доказал, что множество простых чисел бесконечно, и детям современной начальной школы. Далее Гейтинг утверждает, что понятие натурального числа, смысл которого однозначно определим каждым интеллектуально развитым человеком, предполагается в интуиционизме основным фундаментальным элементом для построения всего математического знания. При этом ученый оговаривает, что натуральное число все же не может быть однозначно и точно определено в языке. Однако при этом данное понятие интуитивно достаточно ясно для того, чтобы на его основе можно было построить арифметику и использовать его в фундаменте дальнейшего построения математического знания[3].

Гейтинг пытается дать некоторую трактовку понятия числа и размышляет о предпосылках и фундаменте этого понятия в бытийном и теоретико-познавательном смысле. По мнению Гейтинга, воспринимая любой предмет, мы отвлекаемся от его частных свойств. При этом источник понятия натурального числа заключается в понимании возможности неограниченного повторения в нашем сознании такого предмета, лишенного его частных свойств. Однако на этом этапе рассуждения ученого ограничиваются, чтобы не перейти в разряд метафизических. Размышления о натуральном числе, считает Гейтинг, приобретают характер метафизических, если задаться решением вопроса о формировании понятия сущности: необходимо ли при этом абстрагироваться от действительных восприятий предметов или само понятие сущности изначально должно присутствовать в нашем сознании, что позволило бы воспринимать предмет абстрагированным от реального мира. Однако ученый предпочитает ограничиться

[2] Гейтинг А. Интуиционизм. Введение / пер. Б. А. Янкоба, под ред. и комментариями А. А. Маркова. – М.: «МИР», 1965. – С. 10.

[3] Подробнее см.: Там же. – С. 16–17,25.

лишь констатацией того, что понятие сущности и их последовательностей «ясны для каждого нормального человеческого существа»[4].

Решая проблему существования равных чисел, Гейтинг вынужден дополнить понятие натурального числа. Если бы натуральное число рассматривалось только как результат умственного построения отдельного математика, то оно переставало бы существовать после завершения этого построения. Это исключало бы возможность сравнения и сопоставления указанного натурального числа с другими натуральными числами, которые представляют собой результаты умственного построения других математиков, работавших в другое время и в другом месте. В связи с этим Гейтинг вынужден констатировать тот факт, что математика не является чисто умственной. Решение этого вопроса заключается в возможности фиксирования натурального числа с помощью средств материального представления. Это позволяет связывать с каждым натуральным числом как элементом построения какой-либо реальный элемент, к примеру, точку на бумаге. Такая возможность связывать абстрактные сущности с реальными объектами материальной действительности, по мнению Гейтинга, позволяет сравнивать простым наблюдением числа, построенные в различное время, и использовать понятие числа в качестве фундаментального понятия математики[5]. Очевидно, что Гейтинг, несмотря на отказ от решения философских вопросов в обосновании математики, все же соглашается с тем, что числа всегда при их восприятии человеком отождествляются с объектами действительности. На наш взгляд, подобный вывод указывает на характер интуиционистского подхода к определению природы чисел. Они трактуются последователями Брауэра в качестве связанных с реальностью, универсальных, однозначно воспринимаемых составляющих фундамента математики, использование которых позволяет построить все ее разделы.

Аналогичное Гейтингу мнение относительно понятия натурального числа высказывает другой представитель интуиционизма – Герман Вейль. По его словам, существование некоторого числа n со свойством P возможно утверждать при условии, что удалось построение такого числа с указанным свойством, и при необходимости в дальнейшем всегда возможно действительное указание на определенное число, обладающее свойством P. При этом альтернатива из классической математики, в которой возможны только варианты, утверждающие, что либо такое число существует, либо для всех чисел обязательно свойство не-P, безосновательна[6]. Вейль считает, что какое-либо суждение общего характера о числе возможно получить исключительно при исследовании сущности числа, а не в результате исследования отдельных чисел или их последовательностей. Вследствие того что человек неспособен исследовать весь натуральный ряд чисел, только

[4] Там же. – С. 22.
[5] Там же. – С. 24–25.
[6] См.: Вейль Г. Полвека математики. / пер. с англ. З.А. Кузичевой. – М.: ЗНАНИЕ, 1969. – С. 44.

знание, что число в сущности своей должно обладать свойством не-Р, позволит однозначно сделать вывод об отсутствии у числа свойства Р[7].

Вейль высказывает ряд предположений о сущностной структуре и свойствах числа, то есть предположений метафизического характера, несмотря на отмеченную нами тенденцию у представителей интуиционистской программы избегать таких рассуждений. Он считает, что одним из значимых вопросов для математика остается вопрос о природе числа, а точнее о том, необходимо ли числа рассматривать как самостоятельные идеальные объекты, или арифметика просто оперирует знаками чисел. Причем во втором случае числа могут быть однозначно определены любым человеком в любое время в силу однозначного соответствия своим знакам, используемым при написании. Вейль считает, что неизменные во времени и удобные знаки становятся необходимыми на том этапе, когда с ними связывается часть умственных операций для сохранения и передачи другим людям. Вследствие этого, не сравнение чисел, а их определение требует употребления определенных знаков, поскольку «не принимая в соображение какого-нибудь знака, понять выражение ««раздалось 4 звука» невозможно» [8].

Вейль приходит к выводу, что вопрос об отнесении чисел к области понятий или же идеальных предметов малозначим, поскольку они не обладают самостоятельным существованием, а их бытие определено исключительно функциональностью и значением большего и меньшего, являющегося одним из фундаментальных для чисел. Далее он рассматривает отношение числа к пространству и времени и говорит о том, что время в качестве формы чистого сознания представляет собой конкретную и существенную предпосылку интеллектуальных операций, являющихся основой высказываний о числах. Однако, по мнению ученого, связь времени и арифметики не аналогична связи геометрии и пространства. Очевидно, что арифметика не является однозначным следствием и проявлением способности к восприятию человеком времени в той степени, в которой геометрия представляет собой следствие восприятия человеком пространства[9].

Вейль утверждает, что на основании содержания однозначно установленного понятия о каком-либо предмете может быть указана сфера существования совокупности предметов, соответствующих этому понятию. Однако это, считает он, не говорит о том, что такое понятие совокупности «объемноопределено», то есть неверным будет утверждать, что существующие предметы, которые подпадают под это понятие, образуют внутренне ограниченную и определенную в себе идеальную замкнутую совокупность. Основываясь на интуитивно определяемый процесс образования человече-

---

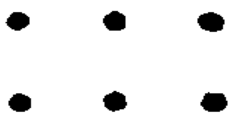
[7] Подробнее об этом см.: Вейль Г. О философии математики: пер. с нем. / предисл. С.А. Яновской. Вступ. ст. А.П. Юшкевича. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2005. – С. 22–23.

[8] Там же. – С. 62–63.

[9] Там же. – С. 62–65.

ским разумом натуральных чисел, мы уверены в том факте, что понятие натурального числа является объемноопределенным. При этом понятия «предмет», «свойство натуральных чисел» и им подобные не являются объемноопределенными. Далее Вейль говорит о том, что экзистенциальные суждения и общие высказывания о числах получают смысл только в том случае, когда не имеющее объема понятие «свойство рациональных чисел» приводится к объемноопределенному понятию «x-свойства» (где x – предмет, образующий объемноопределенную совокупность) [10].

Л. Э. Я. Брауэр в своей работе «Intuitionism and formalism» определяет число как некоторое понятие, образованное свойственной человеку особенной способностью разделять моменты времени и с помощью внутренней интуиции, воспринимать переходы от одного момента к другому. По мнению Брауэра, эта фундаментальная для математики способность человеческого разума создает все натуральные числа, бесконечное количество которых объясняется возможностью представлять каждое из них в качестве новой пары чисел. Далее математик утверждает, что не только арифметика сама по себе основывается на указанной выше способности человеческого разума, но также и геометрия, включая и неевклидовы и n-мерные ее составляющие, имеет своим основанием арифметику, построенную с помощью интуиции двуединства и последовательности временных событий. В качестве подтверждения своей точки зрения Брауэр указывает тот факт, что со времен открытия Декартом метода координат появилась возможность сводить геометрию к арифметике[11].



Ф. Клейн, анализируя в своей книге «Элементарная математика с точки зрения высшей» обоснование одиннадцати основных законов счета, приходит к выводу, что вместе с арифметикой указанные законы также представляют собой основу всего математического знания. Кроме того, Клейн утверждает, что достоверность всего фундамента математики в таком случае своей основой имеет интуицию. Основанием математики он предполагает закон полной индукции, имеющий, по мнению Клейна, чисто интуитивный характер и позволяющий нам «выйти за те пределы, в которые нас ставит конкретное созерцание». В качестве примера использования естественной интуиции для непосредственного созерцания законов действий над числами Клейн приводит фигуру, состоящую из шести точек (Рис.). По его словам, при рассмотрении данной фигуры интуитивно понятно, что точки, из которых она состоит, могут рассматриваться и как две строки по три точки в каждой, и как два столбца, каждый из которых включает две точки, то есть 2×3=3×2. Если же возникает ситуация, когда необходимо оперировать «сколько-нибудь значи-

[10] Подробнее см.: Там же. – С. 64.
[11] См.: Brouwer L.E.J. Intuitionism and formalism // Bulletin (New Series) of the American mathematical society. Volume 37, Number 1. – P. 58.

тельными» числами, то именно тогда, по мнению Клейна, непосредственное созерцание уступает место закону полной индукции[12]. Представляется очевидным, что автор, анализируя интуиционистскую трактовку понятия числа, говорит о трактовке представителями школы Брауэра числа как сущности, имеющей отношение к объективной реальности. То, что на определенном этапе математической деятельности чистое созерцание не является объективным критерием истинности, судя по словам Клейна, выступает следствием неидеальной структуры нашего разума.

Для интуиционистского направления обоснования математики весьма характерно стремление определить сущность понятия числа через наиболее фундаментальные, по мнению последователей Брауэра, свойства чисел, а именно через свойство следования одного числа за другим. Именно в интуитивном восприятии разумом человека последовательности чисел, самой сущности следования одного элемента числового ряда за другим, интуиционисты видят возможность построения фундамента арифметики и на ее основе – всей математики. Ранее упоминалось, что Брауэр определяет порождение понятия числа способностью человека разделять моменты времени. Кроме того, такая способность позволяет человеку определить понятие последовательности. Однако ученый связывает с понятием последовательности не только построение и восприятие человеком натурального ряда, но и науку в целом. При помощи этого процесса человек способен всегда и везде создавать порядок в окружающей его действительности, дополняя ряды причинных последовательностей и делая их более применимыми. Кроме того, человек при выявлении последовательности причинных событий способен выделять из структуры действительности явления, имеющие характер вторичных по отношению к основной последовательности вцелом. Но все же, что касается арифметики, как фундамента математики, Брауэр однозначно определяет в ней последовательность натуральных чисел как высшее проявление интуиции двуединства разделенных моментов времени и единственно возможное основание математического знания. Он говорит также, что указанная врожденная интуиция позволяет человеку одновременно воспринимать связанное и разделенное, непрерывное и дискретное, что является предпосылкой интуитивного восприятия линейного континуума. Интуиция линейного континуума дает человеку возможность осознать понятие «между», что в свою очередь открывает возможности бесконечного добавления новых единиц и позволяет отказаться от восприятия континуума как конечного набора единиц[13].

А. Гейтинг, говоря о предполагаемых в интуиционизме основаниях математического знания, ставит в качестве требования к ним возможность

---

[12] Об этом см.: Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. пер. с нем. Издание четвертое. М., Наука, 1987. – С. 27–30.

[13] Подробнее см.: Brouwer L.E.J. Intuitionism and formalism // Bulletin (New Series) of the American mathematical society. Volume 37, Number 1. – P. 55–57.

непосредственного восприятия и понимания, без обращения к философии. Сам ученый считает, что единственным возможным в таких условиях основанием может предполагаться процесс счета. И, тем не менее, Гейтинг говорит о том, что счет еще слишком сложен для того, чтобы быть фундаментом математики, поскольку счет требует наличия объективной действительности, чтобы однозначно отождествлять объекты этой действительности с натуральными числами. Вследствие этого ученый предполагает в качестве основания возможность человеческого разума концентрироваться на одной сущности, потом на другой (причем первая должна оставаться в памяти, иначе не будет создаваться процесс счета), что создает по сути своей последовательность натуральных чисел. При этом нет необходимости задумываться над вопросом, сущности какого рода изолируются или пересчитываются, важна сама деятельность разума. Далее Гейтинг утверждает, что факт создания человеком сущностей относится не только к области математики, по его словам, данный процесс происходит с разумом человека постоянно. Вопросы же философского характера о том, как именно происходит мышление сущностями, не имеют значения, поскольку процесс постижения сущности для каждого человека индивидуален[14].

Г. Вейль, определяя исходный пункт математики, также приходит к выводу о том, что первичным объектом математики является ряд натуральных чисел, построение которого трактуется как процесс порождения первого числа 1 и любого другого числа, непосредственно следующего за уже определенным. Вследствие этого, единственным основным отношением в области натуральных чисел, из которого следуют и к которому сводятся все прочие, представляет собой отношение между числом n и следующим за ним числом n\`. А какое-либо относящееся к числам понятие общего характера будет законным только в том случае, если оно будет получено при помощи полной индукции, а точнее – при помощи указания, что понятие обозначает для первого числа 1 и того, как оно переносится с любого числа n на ближайшее число n\`, следующее за ним n\`=(n+1)[15]. По словам Вейля, вся теория натуральных чисел строится на указанном выше методе, который «приносит с собою в математические доказательства совершенно новый и своеобразный момент, он-то и составляет душу искусства математического доказательства»[16].

В том аспекте обоснования натуральных чисел, который относится к процессу построения числового ряда, Вейль наиболее существенным пунктом считает понятие порядка. Изначально числа выступают в качестве порядковых, а единственным признаком, их характеризующим, является конкретное место каждого числа в ряду. Только прохождение всех чисел натурального ряда от единицы до указанного числа n позволяет нам по-

---

[14] Гейтинг А. Интуиционистские взгляды на природу математики. – М.: РГИУ,1999. – С. 2–6.
[15] Подробнее см.: Вейль Г. О философии математики. – С. 26, 35.
[16] Там же. – С. 61.

строить заданное число n, при этом применение такого процесса построения к изначально данной совокупности объектов позволяет нам получить число, которое будет определять для нас понятие количества элементов совокупности. По словам Вейля, в процессе счета элементы совокупности преобразуются в упорядоченную последовательность элементов[17]. При этом необходимо некоторое рассуждение особого характера, чтобы прийти к осознанию того, что результат пересчитывания не зависит от его порядка. И хотя Вейль не дает в своей работе ни детального описания процесса этого рассуждения, ни описания вызывающих его в разуме человека внешних или внутренних причин, все же ученый считает, что именно данный тип рассуждения позволяет установить понятие количественного числа.

Проводя дальнейший анализ понятия последовательности чисел, Вейль утверждает, что положения и доказательства классической математики верны и понятны только в том случае, когда понятие последовательности трактуется особым образом. Точнее, когда последовательность строится из отдельных произвольным образом выбранных чисел, а результат производимых актов случайного выбора изначально определен. В указанном случае, по мнению ученого, правомерным будет вопрос о том, встречается ли в описанной последовательности чисел в качестве ее членов число «один». Но Вейль считает такое определение неверным и несостоятельным, поскольку сущность бесконечной последовательности основывается на понятии неисчерпаемости. Из этого следует, что единственно возможным способом задания определенной до бесконечности последовательности представляется закон, по которому производится однозначный выбор ее членов. Но если последовательность строится свободным выбором, то ее необходимо рассматривать как становящуюся. Для таких последовательностей ответ о присущности того или иного свойства возможно получить только на определенном этапе развертывания последовательности, причем дальнейшее ее построение никак не отражается на полученном результате[18]. Представляется очевидным, что наиболее подходящим примером последовательности, заданной до бесконечности при помощи определенного закона, является натуральный ряд.

Вейль характеризует последовательность натурального ряда как исходный пункт математики, определяемый законом, порождающим из ничего первое число 1 и из всякого существующего числа непосредственно за ним следующее. Важным свойством последовательности натуральных чисел при этом является то, что указанный процесс порождения никогда не приводит к числу, построенному в последовательности ранее. Закрепление определенного числа в интуиции, считает Вейль, должно осуществляться символически, то есть посредством соотнесения с особым знаком. Но после установления такого соответствия человек абстрагируется от указанно-

---

[17] Там же.

[18] Там же. – С. 101.

го принципа соотнесения таким образом, что при восприятии натурального ряда «1 есть просто порожденное из ничего, 2 – порожденное из 1 и т.д.»[19]. Таким образом, в указанных принципах восприятия и построения натурального ряда Вейль говорит о присущей разуму способности закреплять в интуиции процесс восприятия последовательности чисел и соотносить числа с определенными символами, которыми являются цифры. При этом Вейль, в отличие от Гейтинга, не определяет соотношение чисел с цифрами в качестве необходимого условия для сравнения и понимания чисел, построенных в различное время разными людьми, а считает такое соотношение единственно возможным для закрепления числа в интуиции.

Вейль делает вывод о том, что математические определения и суждения разделяются на два типа (в зависимости от последовательностей, к которым они относятся): относящиеся ко всей последовательности натуральных чисел (натуральному ряду) и относящиеся к свободно становящимся последовательностям произвольного выбора натуральных чисел. При этом первые определения относятся к вышеупомянутому закону, порождающему первое число 1 и каждое последующее число, а вторые имеют отношение к таким актам выбора натуральных чисел последовательности, которые не определяются никакими законами и строятся произвольно. При этом, по словам Вейля, каждый получаемый член произвольной последовательности обрывает то и дело начинающийся заново процесс построения натурального числового ряда. Изначально интуиция сущности, являющаяся фундаментом всех общих суждений, также опирается у него на закон полной индукции. Сама же эта интуиция, как фундамент математики, считает Вейль, не требует никакого обоснования, поскольку, по сути, она представляет собой первоинтуицию «еще одного раза»[20].

Г. Вейль утверждает, что математика должна применяться только в том случае, если она построена при помощи известных объектов, пригодных для математической работы. Указанные объекты между собой при этом должны отличаться некоторым количеством знаков, с помощью которых их можно отображать. Такими знаками и являются, по мнению ученого, натуральные числа. Необходимо отметить, что в математике под определение знака подпадает прежде всего понятие цифры. И только с помощью цифр в дальнейшем происходит построение знаков чисел, при этом ошибочным будет понимание сущности числа исключительно как объекта, полностью определяемого его знаком.

Применение символического метода, заключающегося в замене объектов их знаками, позволяет, по мнению Вейля, связать эти объекты с арифметикой и, на ее основании, с конструкциями любой сложности. В качестве примера математик указывает сведение геометрии к чистой математике, в которой возможно отобразить геометрические объекты в виде чи-

[19] См.: Там же. – С. 108.
[20] Подробнее см.: Там же. – С. 107–109.

сел[21]. Данный пример говорит о предполагаемой Вейлем возможности выражения геометрических отношений арифметикой. Это созвучно вышеуказанному утверждению Л.Э.Я. Брауэра о возможности полного сведения геометрической составляющей математики к арифметике.

Помимо понятий натурального числа и следования в ряду натуральных чисел, существенным для раскрытия сути арифметической составляющей математики в направлении интуиционизма является определение понятия первого члена последовательности натурального ряда. Из сказанного ранее представляется очевидным, что Г. Вейль предполагает в качестве первого члена натурального ряда единицу. При этом сам натуральный ряд описывается процессом, который образует всякий раз из уже полученного числа ближайшее следующее за ним число. Определяя возможность соотнесения интуитивно воспринимаемых чисел со знаками цифр и дальнейшего «упрощения» их восприятия, ученый однозначно утверждает, что единица в качестве первого члена натурального ряда является порожденной из ничего. Однако факт «порождения из ничего» первого члена натурального ряда у Вейля имеет сомнительный характер, потому как математик не дает точного источника и необходимых условий, при которых возможно появление сущности, которая бы определялась человеческим разумом как единица. По этой причине та часть обоснования арифметики в интуиционистской программе Вейля, которая связана с определением первого члена числовой последовательности, является, считаем мы, наиболее противоречивой во всей структуре обоснования.

У Гейтинга также присутствует прямое указание того, что первым членом натурального ряда в арифметике, по мнению интуиционистов, является единица: «Мы начнем с понятия натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д.»[22]. Обоснование самого понятия счета Гейтинг строит на процессе абстрагирования от окружающего мира при созерцаемой человеком единичной сущности, впоследствии становящейся единицей натурального ряда. В этом смысле сходное понимание статуса первого члена последовательности в интуиционизме предложено и в позиции Л.Э.Я. Брауэра. Его определение процесса построения натурального ряда основой своей имеет разделение единичного момента времени на две половины, каждая из которых также может образовать подобную двойку. Однако, несмотря на указанную общность в подходах представителей интуиционизма к определению первого члена натурального ряда, остается без пояснения факт выделения первичной единицы «из ничего». Аналогично отсутствию у Г. Вейля закона или правила, А. Гейтинг не определяет, какой тип умственного процесса позволяет отделять первичную сущность из пустоты или выделять ее из бесконечного множества подобных сущностей. Л.Э.Я. Брауэр также не

---

[21] Подробнее см.: Там же. – С. 109.

[22] Гейтинг А. Интуиционизм. Введение / пер. Б.А. Янкоба; под ред. и коммент. А.А. Маркова, М.: МИР, 1965. – С. 22.

указывает, каким образом человек воспринимает целостный поток времени, впоследствии разделяемый с помощью интуиции двуединства на отдельные моменты, являющиеся фундаментом для построения натурального ряда. Очевидно, что отсутствие определения нуля в качестве первого члена натурального ряда было вызвано в интуиционизме абстрагированием от решения вопросов метафизического характера. А точнее – отказом от рассмотрения изначально воспринимаемых интеллектом человека и порождающих единицу натурального ряда понятий единого потока времени у Брауэра и всей совокупности объектов окружающей действительности у Гейтинга. В дополнение к вышесказанному необходимо отметить, что представители интуиционистского направления неоднократно указывают, что в структуре математического знания логика имеет вторичный характер по отношению к математике, вернее к лежащей в ее основе арифметике[23].

Брауэр однозначно определяет и сводит онтологические и гносеологические основания натуральных чисел к понятию интуиции последовательности разделенных во времени явлений. При этом остальная математика и логика являются лишь надстройкой над фундаментом арифметики натуральных чисел. Математику Брауэр представляет в качестве не зависящего от совершенствования приборов эталона и идеала научного знания, который человек неизменно и эффективно использует для постижения природы. Таким образом, математика представляет собой точную науку. Наука же для Брауэра – это систематизация законов природы через раскрытие причинных последовательностей явлений[24].

На основе вышесказанного мы приходим к выводу, что суть науки в интуиционизме Брауэра заключается в процессе выявления причинных последовательностей явлений. Сущностной же основой математики как эталона научности является интуиция последовательности явлений. Основание интуиционистами фундамента математики на вышеуказанных утверждениях Брауэра требует постановки ряда вопросов: исключает ли Брауэр причинность из описания природы математики? и правомерно ли такое исключение? Кроме того, означает ли такое действие Брауэра, что точность в математике порождается исключением из рассмотрения в ней причинных связей (абстрагированием от них)? Но наиболее существенным, по нашему мнению, является вопрос о том, может ли описание сущности математики быть дополнено понятием интуиции причинной последовательности? На наш взгляд, указанные вопросы при учете полученных в статье результатов имеют положительный ответ. Это в свою очередь позволяет нам утверждать, что при рассмотрении сущностной основы математики необходимо наравне с арифметической учитывать и логическую компоненту.

---

[23] См., например: Гейтинг А. Интуиционизм. Введение; Вейль Г. О философии математики. – С. 109–110.
[24] Brouwer L.E.J. Intuitionism and formalism. – P. 55, 58.

В.Т. Мануйлов
(Курск)

ОБОСНОВАНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ В КОНСТРУКТИВНОМ НАПРАВЛЕНИИ*

Статья посвящена исследованию конструктивистского подхода к обоснованию арифметики и математики. Рассматриваются проблемы существования арифметических объектов, выявляются гносеологические основания конструктивности математических теорий.

Развитие науки вообще (и математики в частности) в XX веке характеризуется прежде всего распадом единого поля теоретизирования на три относительно самостоятельные, хотя и тесно взаимосвязанные области: собственно наука, философия и методология науки (эпистемология; philosophy of science; Wissenchaftstheorie) и собственно философия. Ситуация оценивается как «разрыв между наукой и философией»[1], «утерянная связь между естественными и гуманитарными науками»[2]. Возникают проблемы демаркации, самоопределения, саморефлексии и взаимной рефлексии указанных областей, складываются характерные подходы в постановке и решении этих проблем. На рубеже третьего тысячелетия многообразие различных подходов достаточно четко укладывается в границы двух фундаментальных концепций: аналитической и конструктивной теории науки[3].

Математика и философия дают два образца теоретизирования, переплетение которых образует качественную определенность, «своеобразное лицо» значительных этапов в развитии европейской духовной культуры. Не составляет исключения и современная ситуация: как в аналитической, так и в конструктивной философии науки значительное место принадлежит концепциям взаимоотношения философии и математики.

Под аналитической философией науки мы понимаем здесь традицию XX века, представленную прежде всего тремя наиболее значительными стадиями развития: эмпиризм («Венский кружок» – Карнап – Штегмюллер), рационализм (Поппер – Лакатос), историзм (Кун – Фейерабенд); конструктивная философия науки (konstruktive Wissenchaftstheorie) оформляется лишь в 70–80-х годах прошлого столетия, прежде всего в работах представителей Эргангенской школы или немецкого конструктивизма (основатели: П. Лоренцен, В. Камла). Как одна, так и другая концепция берет в качестве исходного пункта анализа математическое знание; многие представители этих школ профессионально занимались математикой или мате-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-06-00472-а, и РГНФ, проект № 08-03-00049а.

[1] Ф. Франк. Философия науки. – М.-Л., 1960, – С. 38

[2] Там же. – С. 44.

[3] См., напр.: Konstruktionen versus Positionen. Bd I-II / Hrsd. Von Lorenz K. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1979; Construcivizm and Science / Ed. By Butts R.E. and Brown J.R. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1989.

матической физикой; характерным для обоих направлений является ориентация на истолкование проблем философии науки как проблем философии языка. Однако аналитическая и конструктивная философия науки предлагают в принципе различные образы науки, а также пути, методы построения и обоснования научного знания. Это различие выражается терминами «исследование» или «путь (метод) исследования»[4] – для аналитической философии науки и «представление» или «путь (метод) представления» («die Vorsterlung» – Wohrapp H.; «the way of representation» – Lorenz K.) – для конструктивной философии науки.

Историко-философским истоком и ориентиром для аналитической философии науки служит Просвещение[5], в области философии математики – Г. В. Лейбниц. Идеалом научного знания (в том числе и философии) для мыслителей этой эпохи служит математика в силу абсолютной безусловности, необходимости, достоверности (истинности), аналитичности ее положений. Подобным же образом в рамках аналитической философии науки в качестве образца науки рассматривается физико-математическое естествознание, принимаются тезисы об аналитичности математики, о редуцируемости математического знания к логике (принимаемой как теория множеств), о «бессмысленности метафизики» (Р. Карнап), о научной философии как анализе языка точными формальными средствами. «Путь исследования» методологически обеспечивается корреспондентской теорией истины в формализованных языках (А. Тарский), концепциями «третьего мира» и «эпистемологии без субъекта знания» (К. Поппер), «научно-исследовательских программ» (И. Лакатос), «научных парадигм» (Т. Кун), «методологического анархизма» (П. Фейерабенд).

Объединяющим принципом для всех ступеней аналитической философии науки является принцип абсолютной объективности научного знания, согласно которому научные теории, проблемы, гипотезы и т. д. являются «обитателями» особого «платонистского» мира, лишь «открываемого» исследователем так, как географ открывает новый материк (К. Гедель). Субъект является лишь «исследователем», субъективное рассматривается как синоним неполного, ошибочного, одностороннего. Поэтому «историзм» аналитической философии неизбежно связывается с отрицанием закономерного развития; «рост научного знания» совершается «методом проб и ошибок»; история науки лишь убеждает «исследователя» в правомерности правила: «все позволено», или «делай, что хочешь» (П. Фейерабенд). Адекватным выражением аналитической версии обоснования математики является программа Гильберта.

---

[4] «die Forschuhg» – Wohrapp H. Analytischer versus konstruktive Wissenchaftbegriff // Konstruktionen versus Positionen. Bd. II. – S. 348–377; «the way of reaserch» – Lorenz K. Science, a rationsl enterprise // Constructivism and science. – P. 3–18.

[5] Lorenzen P. Aufklärung und Vernunft // P. Lorenzen. Konstruktive Wissenchaftstheorie. – Fr. A. M., Suhrkamp Verlag, 1974. – S. 98–112.

Конструктивная философия науки видит свои истоки в немецкой классической философии (не случайно И. Канта называют «дедушкой немецкого конструктивизма»). К предшественникам немецкого конструктивизма относят, кроме того, Маркса, Дильтея, Гуссерля, Хайдеггера и т. д. – то есть тех мыслителей XIX–XX вв., которые акцентировали внимание на человеческой практике, формах субъективной деятельности при анализе философских проблем науки. Кантовский «трансцендентальный» метод, диалектический метод Гегеля, диалектико-материалистический метод Маркса, феноменологический метод Гуссерля, современная философская герменевтика образуют ту «среду обитания», в которой формируется немецкий конструктивизм. «Отцом немецкого конструктивизма» считается оригинальный мыслитель Г. Динглер, специально занимавшийся основаниями точных наук. Основатель Эрлангенской школы П. Лоренцен (начинавший свою научную деятельность как специалист-математик) сравнивает научное знание с судном в море: мы можем его усовершенствовать или переделывать только доска за доской, все время пытаясь оставаться на плаву[6]. Философия науки должна представить этот процесс усовершенствования знания. Критерии науки как «представления» вытекают из возможных (потенциальных) процедур ученых и могут быть охарактеризованы двумя принципами: 1) принцип метода или непрерывности («представления» работают «без скачков») и 2) принцип диалога. В лоренценовском обосновании математического знания используются оба метода (в виде «исчислительных» языковых слоев и «диалогического обоснования» логики и математики).

В качестве второго идейного источника конструктивной философии науки выступает конструктивное направление в обосновании математики, которое подразделяется в настоящее время на широко конструктивное и узко конструктивное. Все теории, обосновываемые в данных направлениях, являются «конструктивными теориями» (в смысле А. Гейтинга[7]). Существующими в таких теориях считаются объекты, введенные генетическим способом[8] (или «конструкции»). Генетический способ введения объектов конструктивных теорий опирается на следующие процедуры:

1) фиксируется совокупность объектов, существование которых обеспечивается представлением конкретных представителей (репрезентантов) этих объектов;

2) указывается совокупность схем действий (операций), применимых к исходным объектам; если схема действия применима к исходным объектам, то указывается, что является результатом ее применения;

[6] Lorenzen P. Constructive philosophy / transl. by Pavlovic K. R. – Amherst: the Univ. of Massachusetts press, 1987. – X, 291 p.

[7] Heyting A. Some remarks on intuitionism // Constructivity in mathematics / ed. by Heyting A. – Amsterdam: North – Holland publishing Company, 1959. – P. 69–71.

[8] Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В. А. Смирнова – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – С. 417–437.

3) производный объект является результатом последовательного применения схем действия к исходным объектам и к результатам предшествующих шагов.

В конструктивных направлениях запрещается рассматривать в качестве допустимой схемы действия абстракцию актуальной бесконечности, согласно которой на некотором шаге построения бесконечная последовательность объектов, которые могут быть построены применением схем действия к исходным объектам, рассматривается как актуально заданная (всеми своими элементами) совокупность объектов.

При логико-семиотическом обосновании конструктивных теорий способ рассуждения об объектах должен быть согласован с генетическим способом введения объектов теории, то есть с понятием конструкции. Это означает:

1) синтаксические основания математической теории должны строится фиксированным генетическим способом; синтаксическое обоснование такой теории заключается в доказательстве того факта, что синтаксис теории строится фиксированным генетическим способом (принцип конструктивности синтаксиса);

2) семантические основания математической теории должны быть согласованы с генетическим способом построения; то есть правила осмысливания и правила истинности предложений теории должны сопоставлять каждому истинному предложению определенную конструкцию, являющуюся «доказательством» данного предложения (принцип конструктивности семантики);

3) логические основания теории должны быть согласованы с генетическим способом построения в том смысле, что а) логические средства теории должны допускать доказательство существования только таких объектов, которые могут быть построены фиксированным генетическим способом; б) логический аппарат теории должен сохранять синтаксический (или семантический) инвариант теории, определяемый возможностью построения (*принцип конструктивности логики*).

Исходная область объектов со схемами действия и элементарными предложениями, описывающими производимые действия и условия распознавания и отождествления объектов теории, составляют *конструктивный базис* теории[9]. В процессе дальнейшего построения конструктивной теории происходит расширение конструктивного базиса теории; так, например, объектами рассмотрения в расширенной теории могут оказаться предложения или формулы теории, описывающей конструктивный базис (П. Лоренцен называет такой подход ***логическая рефлексия***[10] и ***абстрак-***

[9] Мануйлов В.Т. Конструктивность как принцип обоснования научного знания // Философские науки, № 10, 2003. – С.104–121.

[10] Lorenzen P. Logical reflection and formalism // Journal of symbolic logic. – Groningen, 1958. – V. 23, № 3. – P. 241–249.

ция[11]). Однако для конструктивных теорий всегда должна иметь место возможность перевода объектов расширенной теории в объекты конструктивного базиса и согласованность способов рассуждения в расширенной теории с построениями, совершаемыми в конструктивном базисе теории.

Гносеологические основания конструктивности в *конструктивных теориях* предполагают выявление:

1) гносеологических оснований конструктивности понятия конструкции или конструктивного базиса теории;

2) гносеологических оснований конструктивности принципов расширения конструктивного базиса.

Гносеологические основания конструктивности методов построения объектов составляют: ***принцип потенциальной осуществимости процессов построения объектов и потенциальной бесконечности***; ***принцип эффективного распознавания и отождествления объектов конструктивного базиса теорий.***

Гносеологические основания конструктивности методов расширения конструктивного базиса теории составляют: ***принцип сохранности*** – способ рассуждения об объектах должен быть так согласован с конструктивным базисом теории, чтобы при всяком допустимом расширении теории все объекты, построенные на предшествующих этапах, сохранялись в теории без искажения, а все предложения, бывшие истинными до расширения теории, оставались таковыми и после расширения; ***принцип зависимости математических рассуждений об объектах от положения дел к моменту расширения теории*** – при расширении теории идеализированный субъект может использовать лишь ту информацию, которую он получил на предшествующих этапах построения теории.

Конструктивное направление в основаниях математики ставит своей основной задачей конструктивное в особом, уточняемом в дальнейшем смысле, обоснование той части классической математики, которая нашла достаточно широкое применение в науке и на практике, в первую очередь – арифметики и анализа. Разумеется, не вся классическая математика может быть обоснована конструктивистски; но обоснование арифметики и анализа считается обязательным для того, чтобы конструктивная математика могла рассматриваться как серьезный конкурент классической в глазах математиков[12]. Вместе с тем, изучение конструктивных (с точки зрения конструктивистов) теорий имеет само по себе, безотносительно к классической математике, математический интерес, поскольку в конструктивной математике имеются такие аналоги классических понятий и возникают такие проблемы, которые вообще не могут быть сформулированы в клас-

---

[11] Lorenzen P. Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. – Mannheim; Wien; Zürich: BI – Wissenschaftsverlag, 1987. – 331 S.

[12] Breitkorf H. Untersuchungen über den Begriffen des finiten Schlieβens: Jnaugural – Diss. – München: Lüdwig – Max – Universität, 1968. – S. 5–6.

сической математике. Особый интерес представляет программа конструктивного обоснования математики для целей изучения ***гносеологических оснований конструктивности***[13] математического знания. Конструктивисты пытаются найти «общепринятый» содержательный «базис взаимопонимания», который служил бы общей платформой для серьезной дискуссии между представителями различных направлений в обосновании математики[14]. В поисках такой «основы» математического рассуждения конструктивисты обращаются к анализу действий со знаками, совершаемых математиками в процессе рассуждения. Так, А.А. Марков отмечает: «Согласно фундаментальному тезису конструктивной математики мы рассматриваем в этой науке единственно лишь результаты наших конструкций (называемые конструктивными объектами) и наши способности осуществлять эти конструкции… В конструктивной математической логике наша первая цель есть разъяснить логические связки, применяемые к предложениям, в терминах логических связок, применяемых к действиям»[15].

Гносеологические основания конструктивности теорий, обосновываемых в конструктивистском направлении, определяются, кроме абстракции потенциальной осуществимости, видом конструкций, допустимых в качестве объектов теории, и определенным способом рассуждения. В качестве объектов конструктивистских теорий допускаются лишь так называемые конструктивные объекты. «Конструктивные объекты являются результатами процессов построения, осуществляемых на следующей основе: а) предполагается, что отчетливо охарактеризованы объекты, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве нерасчленяемых на части исходных объектов; б) задан список тех правил образования новых объектов из ранее построенных, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве описаний допустимых шагов конструктивных процессов; в) предполагается, что процессы построения осуществляются отдельными шагами, причем выбор каждого отдельного шага произволен в тех границах, которые определяются списком ранее построенных объектов и совокупностью тех правил образования новых объектов, которые фактически можно применить к ранее построенным объектам»[16]. Конструктивными объектами являются штрихи на бумаге, графы, фигуры, матрицы и так далее. Наиболее употребительными конструктивными объектами являются слова и списки слов в некотором алфавите (А.А. Марков) или фигуры исчисле-

---

[13] Мануйлов В.Т. Гносеологические основания конструктивности математического знания // Проблема конструктивности научного и философского знания: сб. статей: вып. 9 / предисл. В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2007. – С. 43–62.

[14] Lorenzen P. Constructive mathematics as a philosophical problem // Logic and foundations of mathematics. – Groningen: Walters-Noordhoff publishing, 1968. – P. 133–143.

[15] Markov A. A. An approach to costructive mathematical logic // Logic, methodology and philosophy of science III. Proc. of the third international congr. for logic, methodology and philosophy of science / ed. by von Rootselaar, B. – Amsterdam: North-Holl. publ. co., 1968. – P. 283.

[16] Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. – М.-Л., 1962. – Т. 67. – С. 15

ния (П. Лоренцен). Обращение с конструктивными объектами предполагает у субъекта способность распознавать и отождествлять их. Распознание и отождествление исходных конструктивных объектов (букв в алфавите, «атомов» в исчислении) осуществляется на основе способности к ***абстракции отождествления***; распознавание и отождествления производных объектов требует умения понимать и применять правила алгорифма или исчисления.

Итак, общие для всех конструктивистских видов гносеологические основания конструктивности, связанные с принятием в качестве объектов теории лишь конструктивных объектов, можно охарактеризовать следующим образом. В конструктивистских теориях объект считается существующим, если представитель этого объекта дан непосредственно, в доступном чувственному представлению виде (буквы алфавита, формулы исчисления) или доказана потенциальная осуществимость построения объекта путем применения конечного числа заранее заданных операций к исходным объектам (представленным чувственно воспринимаемыми представителями) и к результатам предшествующих шагов построения. «Идеализированный субъект», создающий конструктивные объекты и оперирующий с ними, обладает способностями:

а) различать и отождествлять чувственно воспринимаемые предметы как один и тот же или как различные конструктивные объекты;

б) понимать, когда некоторая операция (схема действия) применима к исходным объектам, а когда не применима, и что получается в результате применения операции;

в) обозревать любое конечное (неограниченно большое) число шагов построения; совершать любое (неограниченно большое) число шагов построения;

г) различать и отождествлять объекты, построенные за конечное число шагов.

Все эти способности имеют идеализированный характер. Так, в а) мы отвлекаемся от различных несовершенств человеческого сенсорного аппарата (иллюзии, ошибки узнавания и так далее). В б) мы предполагаем отвлечение от возможной в практических действиях с объектами неоднозначности или недоступности для понимания предписания для выполнения действия. В пунктах в) и г) – отвлекаемся от ограниченности человеческой способности представлять предметы наглядно и от ограниченности возможности построения имеющимся материалом, временем, пространством. Идеализации, зафиксированные в пунктах а) – г), составляют ***гносеологическое основание конструктивности*** понятия конструктивного объекта.

Обоснование теории в конструктивистском направлении осуществляется путем генетического ее построения[17]. Предметы конструктивного ба-

[17] Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – С. 417–437.

зиса теории строятся с помощью абсолютных генетических построений – конструкций (нормальных алгорифмов или различных видов исчислений). Способ рассуждения конструктивного базиса теории согласуется с конструкциями. Способы расширения теории удовлетворяют ***принципу сохранности***. Широко конструктивное и узко конструктивное направления отличаются именно допустимыми способами расширения конструктивного базиса теории. Мы рассмотрим гносеологические основания конструктивности математических теорий, обосновываемых в *широко конструктивном направлении*, на примере одного из вариантов этого конструктивизма – оперативного обоснования математики Пауля Лоренцена.

Различие между аналитической и конструктивной теорией науки четко проявляется уже при обосновании арифметики или теории чисел. Обсуждая перспективы исследований в области оснований математики, А. Мостовский отмечает преимущества конструктивных подходов именно по отношению к арифметике и теории множеств. «Метод определения предмета исследований математической дисциплины при помощи аксиом оказался очень плодотворным и полезным в основаниях геометрии и в абстрактной алгебре. Напротив, определение предмета арифметики натуральных чисел или арифметики действительных чисел путем указания системы аксиом для этих теорий кажется неубедительным. Это происходит вследствие обнаруженной Геделем неполноты каждой достаточно богатой системы аксиом»[18]. «Следствием неполноты системы аксиом является существование такого выражения *A,* что система остается непротиворечивой как после присоединения к ней выражения *A,* так и после присоединения выражения ~ *A*. Опираясь на так называемую теорему о полноте, получаем, следовательно, две неабсолютные модели рассматриваемой системы, причем в одной модели справедливо выражение *A,* а в другой ~*A*. Таким образом, эти модели неизоморфны; сверх того, они принадлежат к двум арифметическим классам без общих частей (определенным аксиомами *A* и ~*A*). …Следовательно, если бы мы приняли, что арифметика – наука о следствиях, вытекающих из аксиом Пеано, то мы должны были бы заключить, что не существует одного определенного понятия натурального числа и что некоторые свойства натуральных чисел принципиально непознаваемы. Суждение о том, приемлемо ли такое заключение, касается не математики, а философии; наше заключение не содержит ведь внутреннего противоречия, и имеет к тому же определенно теоретико-познавательный характер. Но нам кажется, что точка зрения, принимающая изложенное заключение, неверна. Единственно последовательной точкой зрения, согласной как со здравым смыслом, так и с математической традицией, является допущение, что источником и окончательным «raison d'être» понятия числа как натурального, так и действительного является опыт и практическая приме-

[18] Мостовский А. Современное состояние исследований по основаниям математики // УМН, новая серия. – 1954. – Т.9 – №3 (61). – С. 12.

нимость. Это же относится к понятиям теории множеств, если мы их рассматриваем в достаточно узких пределах – таких, в каких они нужны в классических разделах математики. Принимая эту точку зрения, мы должны сделать вывод, что имеется только одна арифметика натуральных чисел, одна арифметика действительных чисел и одна теория множеств, а поэтому определить эти разделы математики аксиомами, которые должны раз навсегда зафиксировать их пределы и их предмет, невозможно. Аксиомы играют в этих теориях важную роль: они систематизируют некоторый их фрагмент, именно тот, который охватывает наше современное знание; они облегчают иногда изложение теории и поэтому имеют дидактическое значение. Той, однако, принципиальной роли, которую хотел приписать аксиоматическому методу Гильберт, а именно, определить предмет теории, аксиоматика в отношении к арифметике выполнить не может»[19].

«Недостаточность аксиоматического метода в отношении к арифметике и теории множеств побуждает нас искать другой метод обоснования этих теорий. Наиболее интересным является конструктивный метод. Применяя его, мы не определяем математические понятия постулатами, но конструируем их при помощи некоторых заранее описанных операций. Основные проблемы здесь следующие: 1) выбор достаточно обширной системы этих операций, которая сделала бы возможным выполнить по крайней мере большинство обычно выполняемых математиками конструкций; 2) обсуждение вопроса о том, достаточен ли для математики полученный этими конструкциями запас понятий»[20].

Арифметика натуральных чисел, являющаяся конструктивным базисом оперативной математики, строится П. Лоренценом как теория диалогически обосновываемых высказываний языка Я1(А), элементарные высказывания которого имеют вид «$\xrightarrow[K_i]{}$ A», где i=2,3,4, а правила образования совпадают с правилами образования языка Я1[21].

Все осмысленные элементарные высказывания языка математической теории можно разбить по методам их семантического обоснования на три группы: истинностно определенные (wahrheitsdefinite), определенные относительно доказательства (beweisdefinite) и диалогически определенные (dialogdefinite)[22]. Пусть мы рассматриваем некоторую математическую теорию, **практическая** часть которой представляет собой исчисление К. Это значит, что элементарные предложения математической теории

(элементарные формулы) рассматриваются как **зашифрованные** сообщения о свойствах (i)–(vii) некоторого исчисления в практической части:

---

[19] Там же. – С.12–14.

[20] Там же. – С. 20.

[21] Мануйлов В.Т. Исчисление и диалог как методы математической аргументации в «немецком конструктивизме» // Проблема конструктивности научного и философского знания: сб. ст.: вып. 4 / Предисл. В.Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2005. – С. 29–46.

[22] См., напр.: Lorenzen P. Metamathematik.

(i) фигуры A и B исчисления идентичны; (ii) фигуры A и B различны; (iii) фигура A выводима в исчислении K: $\xrightarrow[K]{}$ A; (iv) правило R допустимо в исчислении K; (v) метаправило $R_1, \ldots, R_n \Rightarrow R$ допустимо в K (это значит: правило R допустимо в K, если допустимы в K правила $R_1, \ldots, R_n$); (vi) правило R допустимо относительно K; (vii) a) все фигуры, которые могут быть выведены на основе правил данного исчисления K, имеют определенное свойство; b) для каждого правила K, которое уже полученным фигурам $A_1, \ldots, A_n$ сопоставляет новую фигуру A, если фигуры $A_1, \ldots, A_n$ обладают указанным в a) свойством, то и фигура A обладает этим свойством (индуктивность свойства: например, свойство «быть выводимой формулой» является индуктивным в любом исчислении). Метаправилом исчисления K называется правило, формулами которого являются записи правил исчисления K. Поскольку записи правил исчисления K представляют собой фигуры и формулы некоторого нового исчисления, надстроенного над K средствами реконструированного U-языка (Umgangssprache), введение в рассмотрение метаправил и метамета…правил приводит к построению расширяющейся конструкции «языковых слоев» (Sprachstufen). Поэтому элементарные формулы Я1 в общем случае имеют вид «$\xrightarrow[K_i]{}$ A», (i=1,2,…,n, где n – число ступеней в расширяющейся конструкции «языковых слоев»).

Рассмотрим, как тогда можно было бы интерпретировать логические связки в языке теории. Выбор системы семантических оценок определяется свойствами исчисления, являющегося практической частью теории. Можно приписывать семантические значения *истинно* и *ложно* элементарным предложениям языка: «$\xrightarrow[K]{}$ A» *истинно*, если и только если *фигура* A *выводима в исчислении* K; «$\xrightarrow[K]{}$ A» *ложно*, если и только если *фигура* A *не выводима в исчислении* K. Если исчисление K таково, что предикат «*быть выводимой фигурой* K» является разрешимым, то элементарные предложения теории имеют определенные семантические значения *истинно* и *ложно* в зависимости от того, будет ли выводима соответствующая фигура в исчислении K или нет; элементарные предложения языка теории будут *истинностно-определенными (wahrheitsdefinite)*, и в языке может быть построена обычная классическая логика[23]. Однако имеются исчисления, в которых предикат «*быть выводимой фигурой исчисления* K» не является разрешимым. Можно, конечно, просто игнорировать неразрешимость и считать, что независимо от способа доказательства каждая фигура исчисления или выводима, или не выводима (так сказать, в себе выводима или не выводима), и приписывать опять элементарным предложениям языка математической теории значения *истинно* или *ложно* (в классическом смысле), но такое допущение выходит за рамки гносеологических основа-

[23] Ibid. – S. 15–16.

ний конструктивности в рамках абстракции потенциальной осуществимости. Семантическая истинностная оценка таких элементарных предложений должна учитывать неразрешимость предиката «*быть выводимой фигурой* К», то есть истинностную неопределенность элементарных предложений. Такая семантическая оценка возможна. Дело в том, что все предложения, говорящие о выводимости фигур в любом исчислении, являются *определенными относительно доказательства* (или *доказуемо-определенными – beweisdefinite*), так как предикат «быть выводом (доказательством) фигуры А в К» является разрешимым во всех исчислениях. Семантическая оценка предложения дается не по свойству «*быть истинным*» или «*быть ложным*», а по свойству «*быть определенным относительно доказательства*» или «*не быть определенным относительно доказательства*». Очевидно, все истинностно-определенные предложения являются доказуемо-определенными, но не наоборот.

Введем теперь логические связки для элементарных предложений:

$(\Pi'_1)\ \xrightarrow[K]{} A \Rightarrow\ \neg \xrightarrow[K]{} A;$

$(\Pi'_2) \xrightarrow[K]{} A, \xrightarrow[K]{} B\ \Rightarrow\ \xrightarrow[K]{} A \wedge \xrightarrow[K]{} B;$

$(\Pi'_3) \xrightarrow[K]{} A, \xrightarrow[K]{} B\ \Rightarrow\ \xrightarrow[K]{} A \vee \xrightarrow[K]{} B;$

$(\Pi'_4) \xrightarrow[K]{} A, \xrightarrow[K]{} B \Rightarrow \xrightarrow[K]{} A \supset \xrightarrow[K]{} B.$

Пусть A(α) обозначает произвольную фигуру исчисления К с одним или несколько выделенными вхождениями объекта α; тогда A(x) обозначает результат замены одного (или нескольких) вхождений объекта α в A(α) переменной x, не содержащейся в A(α). В таком случае A(α) есть результат подстановки в A(x) объекта α вместо всех вхождений переменной x. $\xrightarrow[K]{} A(x)$ есть *элементарная пропозициональная форма*, дающая при подстановке вместо x имен объектов исчисления элементарные предложения языка теории. Тогда

$(\Pi'_5) \xrightarrow[K]{} A(\alpha) \Rightarrow \exists x \xrightarrow[K]{} A(x);$

$(\Pi'_6) \xrightarrow[K]{} A(\alpha) \Rightarrow \forall x \xrightarrow[K]{} A(x).$

Какой смысл можно придать логическим связкам и кванторам для области доказуемо-определенных высказываний? Легче всего дело обстоит с конъюнкцией ∧, дизъюнкцией ∨ и квантором существования ∃, смыслы которых задаются семантическими правилами (С1) – (С3):

(С1) дать доказательство $\xrightarrow[K]{} A \wedge \xrightarrow[K]{} B$ – значит дать доказательство $\xrightarrow[K]{} A$ и дать доказательство $\xrightarrow[K]{} B$;

(С2) дать доказательство $\xrightarrow[K]{} A \vee \xrightarrow[K]{} B$ – значит дать доказательство $\xrightarrow[K]{} A$ или дать доказательство $\xrightarrow[K]{} B$;

(С3) дать доказательство $\exists x \xrightarrow[K]{} A(x)$ – значит указать в К объект α и дать доказательство $\xrightarrow[K]{} A(\alpha)$.

Легко видно, что семантическая оценка составных высказываний, образованных с помощью $\wedge$, $\vee$ и $\exists$, эквивалентна простому расширению исчисления К до К′: в К′ вводятся новые атомы, новые фигуры, переменные по фигурам *a*, *b*, и новые правила: (R_2) $a, b \to a \wedge b$; (R_3) $a, b \to a \vee b$; (R_5) $a, b \to \exists x\, a(x)$. Нетрудно видеть, что предоставление доказательства, скажем, для $\xrightarrow[K]{}$ A $\wedge$ $\xrightarrow[K]{}$ B равносильно выведению в расширенном К′ фигуры A $\wedge$ B. Принципиально иная ситуация имеет место для остальных традиционных логических связок: отрицания ($\neg$), импликации ($\supset$) и квантора общности ($\forall$). Что значит дать доказательство $\xrightarrow[K]{}$ A $\supset$ $\xrightarrow[K]{}$ B? Какие действия нужно совершить в исчислении К, чтобы получить **доказательство** $\xrightarrow[K]{}$ A $\supset$ $\xrightarrow[K]{}$ B? Здесь возможны два подхода. Х. Карри[24] использует так называемую дедуктивную импликацию: дать доказательство $\xrightarrow[K]{}$ A $\supset$ $\xrightarrow[K]{}$ B понимается как: *доказать выводимость правила A→B* в некотором расширенном исчислении К′. П. Лоренцен и А.А. Марков[25] определяют смысл импликации другим способом: (С4) дать доказательство $\xrightarrow[K]{}$ A $\supset$ $\xrightarrow[K]{}$ B – значит доказать допустимость правила A→B в К. Но *доказать допустимость правила* R *в исчислении* К – значит показать, что каждая фигура, доказанная с помощью R, доказуема в К и без R, то есть что правило R элиминируемо в К. Очевидно, *доказательство* этого факта уже не является последовательностью фигур исчисления К. Доказать здесь – значит предоставить эффективный способ, позволяющий по каждому доказательству фигуры А в исчислении К с использованием правила R строить доказательство А без использования R. Известно, что нельзя указать общий метод доказательства элиминируемости произвольного правила R в произвольном К: предикат «*правило* **R** *является допустимым в* К» не является в общем случае разрешимым. Некоторая общая схема поиска эффективного способа доказательства элиминируемости и есть игра-диалог. Отрицание вводится подобно импликации: (С5) *дать доказательство* $\neg \xrightarrow[K]{}$ A – значит доказать допустимость *относительно* К правила A $\xrightarrow[K]{}$ Z, где Z – фигура, не выводимая в К. В данном случае «*допустимость правила* A $\xrightarrow[K]{}$ Z *относительно* К» нельзя понимать как демонстрацию того факта, что каждое доказательство фигуры в К с помощью правила A $\xrightarrow[K]{}$ Z можно преобразовать в доказательство без этого правила; ведь под Z понимается не выводимая в К фигура, а поэтому правило A $\xrightarrow[K]{}$ Z заведомо не может использоваться при доказательстве какой-нибудь выводимой в К фигуры. Но *опровержение допустимости правила* A $\xrightarrow[K]{}$ Z в К может быть предоставлено лишь тем, что в К будет выведе-

---

[24] Карри Х. Основания математической логики. – М.: Мир, 1969. – С. 151.

[25] Markov A.A. An approach to costructive mathematical logic // Logic, methodology and philosophy of science III. Proc. of the third international congr. for logic, methodology and philosophy of science / ed. by von Rootselaar, B. – Amsterdam: North – Holl. publ. co., 1968. – P. 283–294.

на фигура A: тогда по правилу $A \xrightarrow[K]{} Z$ в $K \cup \{A \xrightarrow[K]{} Z\}$ будет выводимо и Z; из предположения о допустимости правила $A \xrightarrow[K]{} Z$ в K следует, что Z будет выводимо уже в K, что противоречит определению Z. Следовательно, $\neg \xrightarrow[K]{} A$ понимается как утверждение о *невыводимости* A *в* K*,* то есть о *графическом отличии* A *от любой фигуры*, выводимой в K. Является ли $\neg \xrightarrow[K]{} A$ предложением, определенным относительно доказательства (beweisdefinite)? По определению фигура Z в составе правила $A \xrightarrow[K]{} Z$ есть фигура, не выводимая в K, то есть Z принадлежит *дополнению* класса выводимых в K фигур. Класс выводимых в K фигур всегда рекурсивно-перечислим (по определению исчисления); но известно, что дополнение рекурсивно-перечислимого класса может и не быть рекурсивно-перечислимым классом. Поэтому в общем случае предикат «*быть не выводимой в K фигурой*» не является рекурсивным, а следовательно, предикат «*быть доказательством не выводимой в K фигуры*» (если понимать под доказательством последовательность фигур) не является разрешимым (то есть невозможно построить такое исчисление K′, в котором выводимыми были бы все те и только те фигуры в алфавите K, которые не выводимы в K). Теперь ясно, что предложение $\neg \xrightarrow[K]{} A$ в общем случае не является определенным относительно доказательства (даже если предложение $\xrightarrow[K]{} A$ является таковым); конструктивистское истолкование $\neg \xrightarrow[K]{} A$ может быть дано только посредством указания диалога, в котором могут быть обоснованы предложения подобного вида. Аналогично для универсальных предложений: (C6) дать доказательство $\forall x \xrightarrow[K]{} A(x)$ – значит доказать допустимость в K правила (скорее схемы правил) $\Lambda \rightarrow A(x)$, где Λ – любая выводимая в K фигура. Утверждать эффективную допустимость в K правила $\Lambda \rightarrow A(x)$ – значит иметь метод нахождения доказательства для любой фигуры $A(\alpha)$, полученной подстановкой объекта α вместо переменной x в A(x). Доказательство наличия такого метода также не есть последовательность фигур в K, но есть некоторый диалог. Класс диалогически определенных (dialogdefinite) предложений языка теорий составляют предложения, для которых существует эффективный метод нахождения их семантической оценки в диалоге по правилам; смысл связок, входящих в состав таких предложений, разъясняется посредством понятия **допустимости** соответствующего правила *в* исчислении, составляющем практическую часть теории, или *относительно* данного исчисления. Легко показать, что все доказуемо определенные (beweisdefinite) предложения являются диалогически определенными; для этого достаточно заметить, что выводимые в K правила тривиально допустимы в K, и смысл логических союзов $\wedge$, $\vee$ и $\exists$ можно понимать как *допустимость* в расширенном K′ правил (R_2), (R_3) и (R_5).

Язык Я1 вводится теперь следующим образом.

Пусть A, B, C обозначают произвольные формулы нашего языка; тогда понятие формулы языка Я1 задается следующим фундаментальным индуктивным определением.

П(1) Элементарные формулы, рассматриваемые как зашифрованные сообщения о свойствах (i)–(vii) некоторого исчисления в практической части, являются правильно построенными формулами Я1;

П(2) $A \Rightarrow \neg A$;

П(3) $A, B \Rightarrow A \wedge B$;

П(4) $A, B \Rightarrow A \vee B$;

П(5) $A, B \Rightarrow A \supset B$;

П(6) $A(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{\exists}_{\mathbf{x}}\, A(x)$;

П(7) $A(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{\forall}_{\mathbf{x}}\, A(x)$, где: $A(\alpha)$ – формула языка Я1 с одним или несколькими выделенными вхождениями объекта α исчисления K, не содержащая свободных вхождений переменной x; A(x) – результат правильной подстановки x вместо α в $A(\alpha)$.

Семантический инвариант, сохраняемый правилами П(1)–П(7), выражается предикатом «…есть диалогически определенное высказывание»**:** высказывание называется диалогически определенным, если для его утверждения в некотором диалоге правила для обоих партнеров установлены так, что во всякое время может быть решено: (i) закончен ли диалог; и (ii) кто в этом случае проиграл. Ничья не допускается[26]. Такие правила диалога приводятся в таблице 1.

Таблица 1

	Утверждение	Атака (нападение)	Защита
Конъюнкция	$A \wedge B$	? A **(? L)** ? B **(? R)**	A B
Дизъюнкция	$A \vee B$ $A \vee B$	? ?	A B
Импликация	$A \supset B$	A ?	B
Отрицание	$\neg A$	A ?	
Универсальное высказывание	$\forall x\, A(x)$	α ?	$A(\alpha)$
Экзистенциальное высказывание	$\exists x\, A(x)$	?	$A(\alpha)$

1) В случае конъюнкции атакуется левый (?L) или правый (?R) ее член; защита состоит в утверждении атакуемого члена конъюнкции. 2) Дизъюнкция атакуется вся целиком; защита состоит в утверждении левого члена дизъюнкции или правого; в этом месте диалог раздваивается:

[26] См., например, Lorenzen P. Metamathematik. – S. 20–21.

одна его ветвь соответствует защите левого члена дизъюнкции, другая – правого. 3) Атака на импликацию состоит в утверждении ее антецедента A?, защита импликации состоит в утверждении ее консеквента B. 4) В случае отрицания $\neg A$ атакуется отрицаемое высказывание A?; защита при атаке отрицания невозможна (можно лишь контратаковать предшествующие тезисы противника). 5) Атака универсального высказывания заключается в предъявлении некоторого объекта α предметной области теории (то есть объекта исчисления, являющегося практической частью теории); защита состоит в утверждении $A(\alpha)$ для этого объекта α. 6) Экзистенциальное суждение атакуется в целом; защита состоит в утверждении $A(\alpha)$ для некоторого объекта α из предметной области.

Нетрудно видеть, что правила атаки и защиты находятся в соответствии с семантическими определениями (C1) – (C6). Например, в случае импликации: атака заключается в утверждении антецедента, то есть в предоставлении доказательства A (в диалоге); защита состоит в утверждении B, то есть в предоставлении доказательства B в случае, если предоставлено доказательство A. Если импликация защищается, то есть по любому доказательству A предоставлено доказательство B, то это означает допустимость в исчислении (или относительно исчисления) K, являющемся **практической частью** теории, (метамета...)правила (A) $\equiv>$ (B).

При выборе структурных правил диалога учитываются идеализации, связанные с практикой языковой коммуникации между людьми. Не всякие правила ведения диалога признаются Лоренценом допустимыми, но лишь те, которые являются *разумными.* Игра-диалог должна выявлять образцы языкового поведения, называемого Лоренценом *логическим***.** П. Лоренцен и К. Лоренц разработали различные варианты структурных правил ведения диалога[27]. Исходная система правил является наиболее жесткой; она предполагает самые строгие ограничения на способности участников диалога[28].

(D1) Правило начала. Пропонент начинает с утверждения *тезиса*. Партнеры по диалогу делают ходы попеременно.

(D^S2) Общее правило диалога. Каждый партнер по диалогу атакует высказывание, полагаемое другим партнером *на предшествующем шаге,* или защищается от атаки, предпринятой *на предшествующем шаге* другого партнера.

(D3) Правило выигрыша. Пропонент выигрывает, если он защищает элементарное высказывание (то есть высказывание, которое не содержит логических связок) или если оппонент не в состоянии защищать атакованное элементарное высказывание.

---

[27] См., например, Lorenzen P. Konstruktive Logik // Lorenzen P., Lorenz K. Dialogische Logik. – Darmstadt: Wissenschaftl. Buchgesellschaft, 1978.–S. 210–238; Lorenzen P., Lorenz *K.* Dialogische Logik. – Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1978. – VIII, 238 S.

[28] Lorenzen P. Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. – Mannheim; Wien; Zürich: BI – Wissenschaftsverlag, 1987. – S. 65–88.

Сформулированное здесь общее правило диалога (D^S2) называется *строгим правилом диалога* (*die strenge Dialogregel),* так как оно предполагает у играющих партнеров способность реагировать лишь на последний шаг соперника. Развертывание диалога в соответствии с правилом (D^S2) воспроизводит эффективные смыслы логических связок конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$, отрицания $\neg$, а также кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$. Что же касается импликации $A \supset B$, то ее использование в диалоге со *строгим общим правилом* не воспроизводит ее эффективный смысл. Для адекватной передачи смысла эффективной импликации необходимо, чтобы при атаке на импликацию $A \supset B$ пропонент имел право использовать обе возможности. Такое право представляет ослабленное (более либеральное: liberalere) общее правило диалога, которое П. Лоренцен называет *эффективное общее правило диалога* (D^e2).

(D^e2): пропонент атакует одно из сделанных ранее оппонентом высказываний *или* защищается от последней атаки оппонента.

Каждое утверждение оппонента пропонент имеет право атаковать только один раз в течении диалога.

Оппонент должен атаковать только высказывание, сделанное пропонентом на предшествующем шаге, или защищаться от атаки пропонента на предшествующем шаге.

При замене строгого общего правила диалога (D^S2) на классическое общее правило (D^k2):

(D^k2): пропонент атакует одно из сделанных ранее оппонентом высказываний *или* защищается от одной из сделанных ранее атак оппонента.

Каждое утверждение оппонента пропонент имеет право атаковать всего один раз в течение диалога.

Оппонент должен атаковать только высказывание, сделанное пропонентом на предшествующем шаге, *или* защищаться от атаки пропонента на предшествующем шаге мы получаем понятие *классического* диалога.

«Практическую часть» арифметики натуральных чисел составляют исчисления K_2, K_3, K_4 (a, b, c – переменные для объектов)[29]:

***K_2*: атом: | ;**

базис: | .

Правило (R_{01}): $a \rightarrow a|$

Фигуры K_2 являются объектами K_3 и K_4.

K_3: атомы: | = ;

базис: | = |.

Правило (R_{11}): $a = b \Rightarrow a| = b|$.

K_4: атомы: | + = · ;

[29] Mainzer K. Kants Philosophische Begründung des mathematischen Konstruktivismus und seine Wirkung in der Grundlagenforschung: Inaugural-Diss. – Münster, 1972–1973. – S.180–183; Wolters G. Strichkalkül // Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. – Band IV: Sp–Z. – Stuttgart; Weimer: Metzler, 1996 – S. 106–107.

базис: (O_1): $\dfrac{|+|}{||}$

(O_2): $\dfrac{|\cdot|}{||}$

Правила: (R_{21}): $\dfrac{a+|}{a|}$

(R_{22}): $\dfrac{a+b}{c} \rightarrow \dfrac{a+b|}{c|}$

(R_{23}): $\dfrac{|\cdot a}{a}$

(R_{24}): $\dfrac{a\cdot b}{c}, \dfrac{c+b}{d} \rightarrow \dfrac{a|\cdot b}{d}$

Построение арифметики натуральных чисел (теории АНТ) производится Лоренценом методом, называемым им «конструкцией»[30].

Метод основан на всеобщем принципе индукции (allgemeine Induktionsprinzip)[31]. Пусть имеется исчисление K_v; пусть α_v, β_v, ..., – метапеременные для фигур, выводимых (доказуемых) в K_v.

Пусть К есть другое исчисление и пусть $F(\beta_v)$ обозначает формулу исчисления К, содержащую (кроме атомов и переменных по объектам К) выводимую в K_v фигуру β_v. Тогда всеобщий принцип индукции утверждает:

пусть $B_{11}, B_{21}, \ldots \rightarrow B_1$

.

.

.

$B_{1l_v}, B_{2l_v}, \ldots \rightarrow B_{l_v}$,

правила K_v.

Тогда для каждой фигуры F исчисления К (то есть для произвольного выбора К) можно образовать правила:

(R_1): $F(B_{11}), F(B_{21}), \ldots \rightarrow F(B_1)$

.

.

.

(R_{l_v}): $F(B_{1l_v}), F(B_{2l_v}), \ldots \rightarrow F(B_{l_v})$,

где $F(\beta)$ есть результат замены любого вхождения любой подфигуры фигуры F на фигуру β;

---

[30] Lorenzen P. Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. – Frankfurt am Main: Akad. Verl.-Ges., 1965. – S.3, 6–11.

[31] Mainzer K. Kants Philosophische Begründung des mathematischen Konstruktivismus und seine Wirkung in der Grundlagenforschung: Inaugural-Diss. – S. 181.

то есть для произвольного исчисления К: если добавить к К правила $(R_1),\ldots(R_{l_\nu})$, то в расширенном этими правилами исчислении К' будет выводима всякая фигура $F(\beta_\nu)$.

Метод «конструкции» состоит в том, что некоторое высказывание языка Я1(А), полученное по правилам П(1)–П(7) построения языка Я1, рассматривается как фигура F всеобщего принципа индукции; синтаксис языка Я1(А) рассматривается как исчисление К, а в качестве K_ν берутся K_2, K_3 или K_4. Обоснование с помощью метода «конструкции» обеспечивает диалогическую доказанность (эффективную истинность) обосновываемого высказывания.

Всеобщий принцип индукции позволяет доказать следующие утверждения языка Я1(А):

(1)$\forall a \xrightarrow[K_1]{} | \wedge (\xrightarrow[K_1]{} a \supset \xrightarrow[K_1]{} a\,|)$.

Согласно (1), выражение $\xrightarrow[K_1]{} a$ точно передает смысл выражения «a есть натуральное число».

(2) $A(\,|\,) \wedge \forall a\, (A(a) \supset A(a|)) \supset \forall a\, A(a)$.

(3) $\forall b\, \forall a((\xrightarrow[K_3]{} | = |) \wedge (\xrightarrow[K_3]{} a = b \supset \xrightarrow[K_3]{} a\,| = b\,|) \wedge$
$(\xrightarrow[K_3]{} a\,| = b\,| \xrightarrow[K_3]{} a = b))$.

(4) $\forall a(\neg \xrightarrow[K_2]{} a\,| = |)$.

Здесь $A(a)$ – пропозициональная форма языка Я1(А) с индивидной переменной a, кванторы действуют на областях, объекты которых суть выводимые фигуры в исчислении K_2.

Как арифметические высказывания о числах, сконструированных по правилам K_2, рассматриваются лишь высказывания, удовлетворяющие условию:

(5) $\forall a\, \forall b\, (\xrightarrow[K_3]{} a = b \supset (A(a) \sim B(b)))$.

здесь: $A \sim B$ есть сокращение для $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Методом индукции на основе исчисления K_3 доказываются утверждения:

(6) $\forall a\, (\xrightarrow[K_3]{} a = a)$.

(7) $\forall a\, \forall b\, \forall c\, (\xrightarrow[K_3]{} a = b \wedge \xrightarrow[K_3]{} c=b \supset \xrightarrow[K_3]{} a=c)$.

(8) $\forall a\, \forall b\, (\xrightarrow[K_3]{} a = b \sim \xrightarrow[K_3]{} b=a)$.

На основании (6), (7), (8) доказывается:

(9) $\forall a\, \forall b\, \forall c\, (\xrightarrow[K_3]{} a = b \supset (\xrightarrow[K_3]{} c=a \sim \xrightarrow[K_3]{} c=b)$,

из чего ясно, что $\xrightarrow[K_3]{} c=a$ есть **арифметическое суждение**, то есть вводимый на основании K_3 знак равенства может интерпретироваться как содержательное равенство (если дополнить элементарные фигуры Я1 (А) выражениями А=В):

$x{=}y \leftrightarrows \forall^{*}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}(x) \sim \mathrm{A}(y))$

(в соответствии с пониманием знака = в логике предикатов 1 порядка с равенством), где: x, y – переменные по объектам;

$\forall^{*}_{\mathrm{A}}$ – неопределенный квантор (область его действия не является областью, состоящей из фигур какого-либо исчисления).

Методом всеобщей индукции на основании $К_4$ доказывается

(10) $\xrightarrow[\text{К}_4]{} \dfrac{a+b}{c_1} \wedge \xrightarrow[\text{К}_4]{} \dfrac{a+b}{c_2} \supset c_1 = c_2$

(здесь $c_1 = c_2$ означает по предшествующему $\xrightarrow[\text{К}_3]{} c_1 = c_2$) .

Выражения, сконструированные по правилам $К_4$ (возможно с переменными), – **арифметические термы**.

Всеобщей индукцией на основании $К_4$ доказываются законы арифметики натуральных чисел. Вычитание и деление вводятся неявными определениями термов $a\text{-}b$ и $\frac{a}{b}$:

$a{-}b{=}c \leftrightarrows a = b{+}c,$

$\frac{a}{b} = c \leftrightarrows a = b \cdot c.$

Таким образом теория арифметики натуральных чисел получает гносеологическое обоснование посредством метода «конструкции».

Для перехода к рациональным числам применяется характерный для Лоренценовского построения математики так называемый метод «абстракции». Этот метод состоит в следующем:

(1) конструируются фигуры вида $m//n$ (где m и n – переменные для арифметических термов),

(2) определяется отношение типа эквивалентности

$m_1//n_1 \; \mathrm{R}_э \; m_2//n_2 \leftrightarrows m_1 \cdot n_2 = m_1 \cdot n_2,$

(3) выделяют такие высказывания о фигурах вида $m//n$, которые не меняют свое истинностное значение при замене некоторой фигуры на эквивалентную. Такие высказывания называются инвариантными относительно отношения $\mathrm{R}_э$; высказывание $\mathrm{A}(m//n)$ инвариантно относительно $\mathrm{R}_э$, если имеет место:

$m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \supset \mathrm{A}(m_1//n_1) \sim \mathrm{A}(m_2//n_2).$

Ограничение высказываниями, инвариантными относительно некоторого отношения типа эквивалентности $\mathrm{R}_э$, понимается Лоренценом как «**абстракция**».

Для инвариантных высказываний вводится обозначение m/n вместо $m//n$, и получаем высказывание:

$m_1//n_1 \; \mathrm{R}_э \; m_2//n_2 \supset m_1/n_1 = m_2/n_2,$

где знак « = » понимается как взаимная заменимость термов в высказываниях (в соответствии с пониманием этого знака в логике предикатов 1 порядка с равенством).

Арифметические термы вида m/n рассматриваются теперь как «термы для положительных рациональных чисел» – то есть вводятся новые объекты – рациональные числа, но не посредством исчислений, а посредством «метода абстракции». «Метод абстракции» широко применяется Лоренценом в дальнейшем построении математики. Отметим характерные черты этого метода:

1) конструкцией из исчислений получают некоторые исходные объекты;

2) устанавливается «отношение типа эквивалентности» (рефлексивное, симметричное и транзитивное) между исходными объектами;

3) ограничиваются высказываниями, инвариантными относительно отношения типа эквивалентности;

4) в высказываниях, инвариантных относительно отношения типа эквивалентности, вводим новые термы, представляющие теперь абстрактный объект.

Таким образом, абстракция выступает здесь как операция с высказываниями. Так как исходные объекты вводятся конструктивно (то есть с помощью «эффективных процессов» – исчислений), и отношение типа эквивалентности также вводится конструктивно (то есть имеется эффективный процесс для установления наличия или отсутствия этого отношения между любыми исходными объектами), то введенные подобным образом «абстрактные объекты», хотя и не являются конструктивными объектами, но могут быть представлены конструктивными объектами. Для любого высказывания об этих объектах можно эффективно установить его истинность или ложность. Переход к рациональным числам осуществляется расширением исходного исчисления таким образам, что термы и правила исходного исчисления включаются в новое исчисление.

Важнейшие для построения анализа понятия «функции» и «множества» (рациональных чисел) Лоренцен вводит с помощью **метода абстракции;** именно: функции вводятся посредством абстракции из термов (для рациональных чисел), множества – посредством абстракции из формул.

Естественным образом вводятся переменные для рациональных чисел и «рациональные термы». Устанавливается отношение эквивалентности рациональных термов:

$S(r)\ R_э\ T(r) \equiv S(c)=T(c)$ для всякого c,

где: r, c – переменные для рациональных чисел,

$S(r)$ и $T(r)$ – рациональные термы.

Функции рассматриваются как «абстрактные объекты», например: $\lambda_r T(r)$ – «функция от r, абстрагированная из $T(r)$».

Множества получаются в результате абстракций из формул (то есть высказываний и высказывательных форм; например: $r+s = s+r$, $r \cdot r < 1$ и составные: $s+r = r+s \wedge$ r=0 и так далее). Таким образом, **получается операционалистский принцип выделения** (для одноместных множеств):

$\lambda_x A(x) = \lambda_x B(x) \equiv A(x) \sim B(x)$,

где $\lambda_x A(x)$ представляет «множество, абстрагированное из A(x)». Множества, полученные абстрагированием из двух- и многоместных пропозициональных форм, представляют собой соответственно двух- и многоместные отношения.

Связь между понятиями «множество» и «функция» устанавливается посредством терма дескрипции (или оператора дескрипции): пусть имеется двухместное отношение y Z x, удовлетворяющее условиям:

1) $\forall x \exists y\ (y \mathrm{Z}\, x)$;

2) $\forall x \forall y_1 \forall y_2\ (y_1 \mathrm{Z}\, x \wedge y_2 \mathrm{Z}\, x \supset y_1 = y_2)$;

посредством применения терма дескрипции получаем терм $\mathrm{L}_y(y \mathrm{Z}\, x)$, который содержит свободную переменную x; из этого терма абстрагируем функцию:

$\lambda_x \mathrm{L}_y(y \mathrm{Z}\, x)$

или, если записать отношение y Z x в виде $\langle x, y \rangle \in \mathrm{Z}$, где Z есть множество, абстрагированное из двухместной высказывательной формы (например, Z есть $\lambda_{u, w} \mathrm{Z}(u, w)$), то:

$\lambda_x \mathrm{L}_y\ (\mathrm{x} \in \lambda_{u, w} \mathrm{Z}(u, w))$.

Действительное число рассматривается теперь как множество рациональных чисел, удовлетворяющее условию Коши:

$\forall \varepsilon \exists a \forall b_1 \forall b_2\ (b_1 > a \wedge b_2 > a \supset |\ \mathrm{T}(b_1) - \mathrm{T}(b_2)\ | < \varepsilon)$,

где ε – переменная для рациональным чисел

a, b_1, b_2 – переменные для натуральных чисел

$\mathrm{T}(b_1)$, $\mathrm{T}(b_2)$ – рациональные термы.

Для построения анализа требуются новые термы и формулы, из которых могли бы быть абстрагированы функции и множества. Эти термы и формулы строятся с помощью так называемых **индуктивных схем определения** (аналогично рекурсивным схемам определения). Корректность индуктивной схемы определения (то есть существование множества, абстрагированного из формулы, полученной по индуктивной схеме определения) обосновывается с помощью **обобщенного принципа математической индукции.**

Методы «конструкций из исчислений», «абстракции» и образование формул по индуктивным схемам определений позволяют построить иерархию языковых ступеней, формулы каждой ступени описывают «абстрактные объекты» предшествующего слоя. Эти «языковые ступени» можно рассматривать как **ступени абстракции** над числами, сконструированными посредством исчисления штрихов K_2.

Каждый из этих методов имеет у Лоренцена гносеологическое обоснование, то есть для каждого из методов строго обосновывается его допустимость в рамках тех идеализаций, которые накладываются на деятельность идеализированного субъекта. Поэтому само построение математической теории здесь является методом ее гносеологического обоснования конструктивности.

Однако методы «конструкции из исчислений», «абстракции» и образования формул по индуктивным схемам определений оказываются недостаточными для построения (то есть гносеологического обоснования) всего классического анализа. В частности, при ограничении этими методами не удается доказать фундаментальную для анализа **теорему о наличии точной верхней грани у каждого ограниченного множества действительных чисел** (действительных чисел**, образованных абстракцией из рациональных термов, удовлетворяющих условию Коши,** оказывается «мало»). Поэтому Лоренцен применяет при построении анализа новый метод, называемый им «**логическая рефлексия** над выразительными возможностями языка»[32]. Суть **логической рефлексии** заключается в допущении возможности говорить о бесконечных возможностях образования понятий; например, говорить о «классе всех возможных арифметических функций и отношений», без допущения абстракции актуальной бесконечности.

Формализация иерархии языковых ступеней приводит к некоторому «варианту разветвленной теории типов с двумя сортами переменных, в которой, однако, запрещены не только непредикативное определение понятий, но и актуально бесконечные множества. «Логическая рефлексия» осуществляется посредством различения «определенных» и «неопределенных» объектов и употребления «неопределенных» кванторов. Если «определенные» объекты вводятся посредством эффективных процессов (конструкция, абстракция, индуктивное определение), то «неопределенные» объекты вводятся с учетом всех возможных расширений языковых средств конструкции. Примером такого «неопределенного» объекта является неопределенное множество всех определенных множеств основных чисел. Неопределенные множества Лоренцен называет также «классы», подчеркивая тем самым, что с неопределенными множествами нельзя обращаться по аналогии с определенными. Так, Лоренцен утверждает, что канторовское предположение счетности множества всех функций (в его доказательстве несчетности) не согласуется с неопределенностью, ибо при условии всегда возможного (случайного) расширения множества предполагаемый пересчет более не был бы пересчетом всех функций[33]. Другими словами, неопределенность понимается как возможность постоянного случайного расширения средств конструкции. Высказывание, согласованное с неопределенностью, может быть истинным только тогда, когда оно при всех воз-

---

[32] Lorenzen P. Logical reflection and formalism // Journal of symbolic logic. – Groningen, 1958. – V. 23, № 3. – P. 241–249.

[33] Ibid., P. 241–249.

можных расширениях средств конструкции остается истинным. Использование неопределенных кванторов Лоренцен считает конструктивистски допустимым, так как для неопределенных высказываний (то есть высказываний с неопределенным квантором) он использует интуиционистскую логику. За счет различения определенных и неопределенных объектов Лоренцену удается доказать в «Differential und Integral»[34] большую часть теорем классического анализа, в частности, теорему о существовании наибольшей верхней грани ограниченного сверху множества действительных чисел – теорема, конструктивистский аналог которой опровержим в большинстве других конструктивистских концепций анализа.

[34] Lorenzen P. Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. – 292 S.

Н.В. Михайлова
(Минск)

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ КАК ПРЕДМЕТ ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ РЕФЛЕКСИИ

В философии науки и техники отражаются общефилософские тенденции, свойственные всей философии познания. Статья посвящена анализу того, как философия и методология современной математики фокусируют проблемы природы языка, истины и знания. Поскольку математика – это не только описание абстрактных и аксиоматизированных конструкций, но также и выдающийся феномен человеческой культуры, то основания математики рассматриваются в статье с точки зрения содержательного и познавательного предмета философско-методологической рефлексии.

Актуальность философского и методологического анализа оснований математики обусловлена тем, что классическая математика не смогла решить некоторые проблемы существования чисел наряду с существованием множеств, а также выяснить философско-математическое содержание понятия бесконечного множества. Поэтому в этой работе делается акцент на философские и методологические высказывания профессиональных математиков, совместным трудом которых создавались направления развития современной математики.

В широком смысле к классическому направлению в математике относятся те математические теории, в которых используется абстракция актуальной бесконечности, а для логических выводов применяются аппараты классической логики, которые в своих главных чертах следуют традиции, восходящей к Аристотелю. Критику классической математики традиционно связывают с философским направлением, получившим название «интуиционизм» и возникшим в прошлом веке конструктивным направлением в математике. Все это способствовало развитию новых направлений математики, которые можно объединить термином «неклассическая математика», где наряду с традиционно количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер. При этом, в силу единства математики, под «классической математикой» сейчас понимается классическое направление в математике, а неклассическое направление в современной математике ассоциируется с интуиционизмом и некоторыми его конструктивистскими реализациями.

Важнейшие философские проблемы оснований математики связаны с эпистемологическим статусом математических утверждений и сложным онтологическим вопросом о существовании математических объектов, которые изменяются по ходу познания. Модернизация традиционных направлений философии математики не проясняет новый образ научного знания, складывающийся в современной философии познания. Современный этап развития математики отличается от классического этапа усилением роли алгоритмического в математических теориях. Поэтому в настоящее время особый интерес для математической практики представляет философский анализ оснований математики, с точки зрения ее частичной конструктивности, и прояснение представлений о допустимых подходах к обоснованию современных математических теорий неклассического и постнеклассического периодов развития рационально-научного знания.

Для понимания проблемы обоснования математики следует уяснить смысл самого этого понятия. В разные периоды под обоснованием математики понимались различные философско-методологические проблемы. Например, для древнегреческой математики это была проблема неизмеримых величин, для математики XVII века – проблема интерпретации иррациональных и мнимых чисел, для математики XVIII века – проблема строгости доказательства в теории дифференциального исчисления. На рубеже XIX и XX веков Г. Кантор и Д. Гильберт впервые сформулировали совершенно новое понимание проблемы обоснования математики, рассматривая ее как проблему непротиворечивости новых математических теорий. Решение проблемы обоснования как философско-методологической проблемы математики в такой постановке зависит от выбора методологических и философских оснований математической теории. Множество исходных математических предложений является собственным основанием математической теории, а законы и правила логики, по которым из этих предложений выводятся утверждения математической теории, составляют ее логические основания. Вопрос о том, какая из логик может быть логическим основанием, относится к методологическому основанию математической теории, а пригодность той или иной логики и критерии обоснованности теории относятся к философскому основанию математики.

Философы науки начала прошлого века подвергли логистическое направление в философии математики принципиальной критике, основанной на том, что если основной тезис логицизма верен, то математика становится чисто логико-дедуктивной наукой, заключения которой следуют из законов мышления, необъяснимым образом охватывающих все разнообразие применений математики. После того как математика достигла впечатляющих успехов, начиная с 30-х годов XX века, дух дружеского соперничества между различными философско-методологическими школами уступил место новым спорам о том, что, собственно, следует считать философией математики – формализм, интуиционизм или саму теорию множеств. Невозможность доказать непротиворечивость наносила серьезный удар по формалистической философии математики Гильберта, хотя эта трудность задевала не только его программу. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не был исключением. Философы и логики, работающие в области оснований математики, сошлись на том, что математика, как продукт человеческой деятельности, не может быть логически безупречной. Еще конкретнее высказался австрийский математик Курт Гедель: «Роль пресловутых “оснований” сравнима с той функцией, которую в физических теориях выполняют поясняющие что-либо гипотезы… Так называемые логические или теоретико-множественные основания теории чисел или любой другой вполне сформировавшейся математической теории по существу объясняют, а не обосновывают их…»[1]. Поэтому неудивительно, что профессиональные математики, хорошо осведомленные в пробелах оснований математики, предпочитают держаться в стороне от философских проблем.

Традиционные взгляды на философию математики, ориентированные ранее на вопросы о природе математических объектов, претерпевают значительные изменения в сторону эпистемологической ориентации на вопросы математического познания. В современной философии математики появились новые модификации обосновательных программ, в которых первичные представления математики покоятся на идеализациях, имеющих значение для соответствующей предметной онтологии в контексте конструирования и существования. В постгеделевской математике приемлемы любые содержательные системы понятий, имеющие внутреннюю и внешнюю значимость, что свидетельствует о своевременности обращения к философско-методологическому анализу отдельных разделов современной математики и концептуальному выявлению нового образа математического знания. Несмотря на методологические трудности, связанные с непротиворечивостью аксиоматических теорий, это все же те вопросы, которые необходимо обсуждать философам математики.

Природа и предмет математического знания, начиная еще с античной эпохи, привлекали внимание многих математиков и философов. Особую актуальность философский вопрос о природе математических понятий и сущности математических доказательств приобретает в конце XIX – начале XX веков, когда были обнаружены первые парадоксы теории множеств. Эти парадоксы свидетельствовали о шаткости фундамента здания всей классической математики, на роль которой претендовала теория множеств. Чтобы найти выход из трудностей, были предложены различные программы обоснования математики. В начале прошлого века наиболее влиятельными направлениями нового обоснования математики стали логицизм, интуиционизм и формализм, причем интуиционизм противопоставлялся формализму как попытка ограничения канторовской свободы математики. Поэтому в неклассической математике все большее распространение получают идеи конструктивного направления, поскольку в чрезмерной формализации математики содержатся «скрытые» определения и двусмысленности.

---

[1] Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. – 2-е изд. – М.: РИМИС, 2007. – С. 568.

Наука, как особая интерпретационная деятельность, по своему эпистемологическому статусу не отличается от других культурных феноменов. В математике это не только методы, но и новые математические образы, новые стандарты обоснования знания, а также математическая деятельность в целом, включающая эстетику, интерпретацию и проблему понимания знания. Философ науки академик В.С. Степин считает, что соответствующее воздействие «может быть представлено как включение различных социо-культурных факторов в процесс генерации собственно научного знания»[2]. Философско-методологический анализ научных исследований последней трети XX века, которые представляют постнеклассический тип рациональности, учитывает мировоззренческие установки, определяемые в той или иной степени отдельными социокультурными факторами развития науки. Это предопределяет тот эпистемологический поворот в исследованиях по основаниям математики, который происходит в целом и в философии математики, поскольку, вообще говоря, математическое мышление не свободно от интуитивных допущений, требующих для своего уяснения выхода за пределы математики.

Интенсивные исследования по основаниям математики за последние сто лет, кроме того, что они дали ценные математические результаты, пролили свет и на многие методологические и философские проблемы обоснования классической математики. Исходя из философско-методологического анализа практической двойственности классического и неклассического направлений развития математики, в этом исследовании предложен синтез основных программ обоснования математики второй половины XX века – интуиционизма и формализма. Целостный смысл методологически достигается в синтезе различных аспектов структуры современного математического знания. Новые исследования по этим вопросам дают возможность более конкретно подойти к анализу всего комплекса проблем, связанных с аксиоматическим методом, и в особенности таких, как условия и границы применения аксиоматического метода, сущность и значение формализации в математике.

С аксиоматизацией математики непосредственно связана философская проблема математической истины и критерии установления истинности математических предложений и теорий. Стандарты строгости доказательства, разработанные современной математической логикой, могут служить конкретным примером таких критериев. Однако как само понятие строгости доказательства, так и способы логического вывода меняются с развитием науки, испытывая определенное влияние философии. Особое значение методологический и философский анализ приобретает при выяснении особенностей математической абстракции и проблемы существования абстрактных объектов. Наконец, любая программа обоснования математики

---

[2] Степин В. С. Теоретическое знание: Структура и историческая эволюция. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – С. 41.

существенным образом зависит от определенного истолкования категории бесконечности вообще и математической в особенности. Разный подход к этим понятиям в формалистской математике, с одной стороны, и в интуиционистской – с другой, предопределяет их отношение и к проблемам существования, и к законам логики, и к доказательствам математики.

Современный этап исследований по основаниям математики характеризуется тем, что многие вопросы, которые прежде рассматривались в рамках чисто умозрительных принципов, теперь удается решать с помощью точных логико-математических методов. Именно в связи с этим математическая логика играет доминирующую роль в таких исследованиях. И все же многие фундаментальные проблемы обоснования математики нельзя решать в изоляции от других наук и философии, поскольку именно «нефинитные экстраполяции», а также не поддающиеся конструктивной интерпретации абстракции бесконечности придают математическому аппарату «непостижимую эффективность». Вот почему возникает необходимость в специальном, философском обсуждении проблем обоснования математики, а также в анализе и общей оценке различных программ такого обоснования.

Многие математики ничего не знают о работах по обоснованию математики, поскольку специалисты по основаниям математики настолько углубились в свою область исследования, что их просто не видно в общем потоке математических публикаций. Согласно геделевским результатам, при аксиоматико-множественном подходе к теориям, содержащим теорию натуральных чисел, неизбежно появление «пробелов». Теорема Геделя о неполноте показала, что аксиоматизация имеет свои пределы, что отличается от господствовавшего ранее представления о математике как о совокупности аксиоматизированных теорий. Неоднозначность трактовок геделевской незавершенности аксиоматических систем содержится и в ироническом высказывании немецкого математика Германа Вейля: «Геделю с его истовой верой в трансцедентальную логику хочется думать, что наша логическая оптика лишь немного не в фокусе, и надеяться, что после небольших коррекций мы будем видеть четко, и тогда всякий согласится, что мы видим верно»[3]. В любом случае программа Геделя свидетельствует о том, что любая система аксиом не позволяет доказать или опровергнуть все теоремы того раздела математики, для которого она создавалась. Другими словами, математическую реальность невозможно включить в абстрактные аксиоматические системы.

Способность понимания опережать соответствующее объяснение связана с постепенным ростом убежденности в своей правоте, хотя достижение такого понимания не поддается точной датировке. Если рассматривать современную математику как совокупность абстрактных структур и соответствующих правил вывода, то проблема обоснования математики сво-

[3] Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. – С. 559.

дится к установлению непротиворечивости ее теорий и обоснованию надежности ее доказательств. Проблема обоснования неклассической математики представлялась как обоснование бесконечного на основе конечного, затем акценты сместились на отделение бесконечного, которое нуждается в соответствующем обосновании, от такого бесконечного, которое имеет непосредственное онтологическое обоснование. Заметим, что программа обоснования сама нуждается в обосновании, то есть в философском анализе соответствия своей задаче. Проблема обоснования математики все еще далека от своего решения, поскольку любая программа обоснования содержит в себе дополнительные допущения, имеющие как математический, так и философский характер.

Выявление обосновательного слоя в математике, гарантирующего надежность научного знания, требует глубокого философского анализа понятия бесконечности, принципиально важного для преодоления существующей методологической неопределенности в основаниях математики, поскольку актуальная бесконечность, как и потенциальная бесконечность, укоренена в основания современного математического мышления. Кроме того, введение одной из них предполагает использование другой, а в рамках канторовской теории потенциальную бесконечность можно интерпретировать как актуально бесконечную систему конечных множеств. Важным обстоятельством, определяющим актуальность этой темы, является то, что понятия, лежащие в основании математических теорий, остаются содержательно неясными до тех пор, пока эти теории способны развиваться. Эта особенность математического знания диктует необходимость исследования изменения философско-методологических оснований математики.

Откуда берется уверенность в правильности знания и определенности математического доказательства, если мы не способны ощутить абстрактные методы математики и ее понятий? «Математическое описание мира, – по мнению математика академика В.И. Арнольда, – основано на деликатном взаимодействии непрерывных (плавных) и дискретных (скачкообразных) явлений»[4]. Некоторые математические описания всегда будут неполными, поскольку какие-то аспекты мира на границах человеческого понимания могут «сопротивляться» полному описанию. По существу, в этой сложности, в духе обобщенной концепции дополнительности, проявляется недостаточность формальных методов описания математических процессов и явлений. Философские суждения о рациональности и внерациональности в математике в контексте проблемы соответствия средств целям, вообще говоря, строго не определены, что связано с неопределенностью границ применимости противоположных концепций обоснования. Есть еще и философско-методологические вопросы глобального характера: а являются

[4] Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 12. – С. 1311.

ли новые разделы математики математикой, а именно, совместимы ли они с природой математики? Эти вопросы относятся к проблеме обоснования математики.

Постгеделевские программы обоснования математики стремятся охарактеризовать природу математического познания с помощью выбора объектов исследования, признаваемых математическим сообществом, и с помощью соответствующей регламентации способов рассуждений о них. Уточняя понятие «постгеделевских программ» заметим, что предыдущие ведущие программы обоснования это не некие предпосылки последующих, а непосредственные составные части новых программ обоснования математики. Проблема отыскания закономерностей и тенденций развития различных направлений современной математики распадается на ряд сопутствующих ей методологических подпроблем в контексте реальных изменений философско-методологических оснований современной математики[5]. Трудность удовлетворительного практического решения соответствующих задач состоит в том, что среди математиков и философов нет единого мнения относительно природы математической реальности. Природа математики никогда не была вполне понятной. Это старейшая и труднейшая проблема метафизики, от способов решения которой зависит дальнейшее развитие современной философии математики.

Общим для философов и математиков стало приобретение понимания силы целостного подхода к проблемам, в отличие от их детальных доказательств. Из различия между формальным и содержательным знанием следует, что целостная наука развивается в контексте философской концепции дополнительности, что должно отражаться как в математических теориях нового типа, так и в современной философии математики. Исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, так же как недостижима полная теория познания других сложных явлений, что указывает на необходимость их сосуществования в рамках расширенной концепции дополнительности. Данная гипотеза находит свое подтверждение в ходе анализа современных тенденций развития математического знания и реконструкции философско-методологических оснований математики, поскольку в них отражаются такие фундаментальные двойственности, как формальное и реальное, актуальное и потенциальное, непрерывное и дискретное, вычислимое и невычислимое, конечное и бесконечное.

Даже если некоторые математики игнорируют проблемы оснований, словно этих проблем никогда и не было, то все равно они не достойны осуждения, поскольку многие из них озабочены не менее важной проблемой реального применения математики. Даже если в математике не суще-

[5] См.: Михайлова Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики: монография. – Минск: МГВРК, 2008. – 330 с.

ствует вечных истин, как считает французский математик Андре Вейль, занятия математикой необходимо продолжить: «Для нас, чьи плечи ноют под тяжестью наследия греческой мысли, кто идет по стопам героев эпохи Возрождения, цивилизация немыслима без математики»[6]. В действительности профессиональные математики, пусть и косвенно, через свои математические работы, продолжают бороться с проблемами, возникающими в ее основаниях, инстинктивно пытаясь дополнить и укрепить основания своей науки. Такая работа по философскому осмыслению оснований математики, безусловно, является откликом на естественные проблемы теоретической и прикладной математики. Обратная связь проявляется в том, что исследования по математике раскрепощают научно-философскую мысль. Например, если бы такой глубокий философ, как Иммануил Кант, с большим вниманием следил за развитием современной ему математики, то возможно он не стал бы настаивать на единственно возможных, точнее только евклидианских пространственных ощущениях, допустимых нашим разумом.

Напомним, что математический анализ – один из самых тонких и практически полезных разделов классической математики – был вначале построен, по существу, на не вполне ясных в то время логических основаниях арифметики. Более того, вся история математики показывает, что не существует универсального эпистемологического метода, который можно знать наперед, поскольку у каждого обоснования есть некое необъясненное основание, на котором это обоснование стоит. Поэтому формализации и строгому логическому обоснованию должен предшествовать долгий период осмысления и созидания, не стесняемого никакими философско-методологическими ограничениями. Но, анализируя проблему оснований постгеделевской математики, не следует принижать роль философии, способствующей концептуальной ясности.

Современный философ может попасть в ловушку так называемых «метафизических предпосылок», заполняющих пробелы слабых мест. Поэтому философско-математическое исследование должно исходить из внутренней «проблемной ситуации» в современной математике. Для реализации этой идеи необходим системный метод, то есть философский метод, задающий условия познания, которые могут стать соединяющим фактором примирения противоположностей современных программ обоснования математики.

[6] Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. – С. 562.

В.В. Мороз
(Курск)

СМЫСЛ ЧИСЕЛ В КОНЦЕПЦИЯХ ВЫРАЗИТЕЛЕЙ РУССКОЙ ВЕРСИИ ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА*

В статье выявляются и раскрываются онто-гносеологические основания арифметической составляющей математического знания из контекста произведений выразителей русской версии философско-математического синтеза, а именно Н.В. Бугаева, П.А. Флоренского и А.Ф. Лосева. Анализ аритмологических и монадологических построений Бугаева и философско-математических работ П.А. Флоренского, посвященных развитию темы прерывности, осмыслению теоретико-множественных идей Г. Кантора и стремлению понять число как форму, позволяет сделать вывод о приверженности обоих мыслителей пифагорейскому пониманию математики: будучи далекими от пифагорейского синкретизма, в вопросе об отношении категории числа к действительности и процессу познания мыслители в своем творчестве демонстрируют ярко выраженные пифагорейские тенденции. Анализ произведений А.Ф. Лосева позволяет выделить два плана рассмотрения проблемы взаимосвязи философии и математики: 1) философско-математический синтез, в рамках которого Лосев продолжает линию Бугаева и Флоренского, и 2) философия математики, где число становится непосредственным объектом философской рефлексии: Лосев углубляет пифагорейское понимание числа, диалектически прорабатывая три взаимосвязанные категории (число, количество, величина) и развертывая диалектическую схему становления числа как завершенного целого.

Философско-математический синтез представляет тип взаимодействия философии и математики, при котором результирующее знание есть система, с необходимостью включающая философские и математические компоненты. В рамках такого типа философско-математического взаимодействия философия и математика участвуют в построении целостной картины действительности, способствуя тем самым более глубокому проникновению в глубь явлений, расширению границ мировосприятия и выработке цельного мировоззрения. Различные варианты философско-математического синтеза представлены в истории западной философии в концепциях мыслителей (Пифагора, Платона, Николая Кузанского, Г. Лейбница и др.), принадлежавших разным историческим эпохам, однако оказавшихся близкими в духовном устремлении к целостному миропониманию, определившему их характер философствования и понимание математики в широком мировоззренческом контексте. Русская версия философско-математического синтеза реализована в трудах представителей

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00049а.

Московской философско-математической школы (главным образом, у Н.В. Бугаева), в творчестве П.А. Флоренского, А. Белого, А.Ф. Лосева, в работах Н.Н. Лузина и В.В. Налимова[1]. Философско-математическое наследие указанных мыслителей многопланово и разнообразно. В рамках данной статьи предполагается выявить и раскрыть онто-гносеологические основания арифметической составляющей математического знания из контекста произведений выразителей русской версии философско-математического синтеза.

В настоящей статье мы ограничили объект исследования работами Н.В. Бугаева, П.А. Флоренского и А.Ф. Лосева, так как именно в них содержится богатый материал, анализ которого позволит достаточно полно раскрыть точку зрения русских мыслителей на отношение объектов и понятий арифметики к действительности и процессу познания.

Николай Васильевич Бугаев был, как известно, видным математиком своего времени. Московская философско-математическая школа, которая развивалась под влиянием его учения и при непосредственном его руководстве, занимает важное место в истории русской математики. Выявление онто-гносеологических оснований арифметической составляющей математического знания наиболее плодотворно, на наш взгляд, через анализ аритмологических идей мыслителя. В узком смысле аритмология – это теория разрывных функций, в то время как аналитика – теория непрерывных. К числу аритмологических математических дисциплин относятся арифметика, теория чисел, теория множеств, теория вероятностей и математическая статистика, теория инвариантов, все дисциплины дискретной математики и т. п. Н.В. Бугаев впервые использует термин «аритмология» для обозначения идеи прерывности, свойственной, по его мнению, всему формирующемуся миросозерцанию, грядущему на смену аналитическому миросозерцанию, основанному на идее непрерывности. Идею аритмологии Н.В. Бугаев возводил к древней библейской мудрости: «Ты все расположил мерою, числом и весом» и пифагорейскому тезису «Все есть число» и пытался дух математического исследования вывести за рамки математики и традиционных областей ее применения в естествознании и технике: «Это требование числа и меры является злобою дня не одной современной науки, но и современного искусства и современных человеческих отношений. Найти меру в области мысли, воли и чувства – вот задача современного философа, политика и художника»[2].

Основная задача математического анализа, по Бугаеву, – всякие функции поставить в связь с целыми как простейшими и наиболее понятными нам аналитическими функциями. Истины анализа отличаются общностью

---

[1] Подробнее см.: Мороз В.В. Философско-математический синтез: опыт историко-методологической рефлексии. – М: Изд-во МГУ, 2005.

[2] Бугаев Н.В. Математика как орудие философское и педагогическое. Речь, произн. в торжеств. собрании Имп. Моск. ун-та 12.01.1869. – 2-е изд. – М.: Тип. И.И. Родзевича, 1875. – С. 28.

и универсальностью. Тем не менее, «анализ есть только ступень в развитии научных математических истин, простейшая форма, под которою они являются»[3]. Однако, по мнению ученого, в связи с применением аналитического миропонимания в различных областях наук «некоторые философы стали смело предполагать, что аналитическая точка зрения приложима к объяснению всех явлений. Они стали скрыто допускать, что все мировые события подчиняются определенным и непреложным аналитическим законам. Они стали уверять, что если бы мы знали эти законы, то все явления можно было бы предсказать с такою же точностью, с какою предсказываются солнечные затмения и движения планет. Такое скрытое допущение выработалось под влиянием того обстоятельства, что у современного ученого сложились привычки к аналитическому миросозерцанию»[4].

В глазах Н. В. Бугаева как эволюционный процесс в общественных науках, так и учения Ламарка и Дарвина – не что иное, как попытки применить к объяснению социальных и природных явлений «те воззрения на непрерывную изменяемость явлений, которые господствуют в геометрии, механике и физике»[5]. Характерными чертами аналитического миросозерцания являются: 1) непрерывность явлений во времени и пространстве; 2) постоянство и неизменность законов явлений; 3) возможность понять целое в его элементарных обнаружениях; 4) возможность определенно обрисовать явление для всех прошлых и предсказать для всех будущих моментов времени. По мнению Бугаева, именно доминирование анализа непрерывных функций и невнимание к прерывным процессам в математике определило соответствующее миросозерцание. Для него не вызывает сомнений, что математика является фундаментом для выработки мировоззрения. Однако аналитическое бессильно там, где надо объяснить действия индивидуальности, обладающей свободой и способностью целеполагания. Следовательно, необходимо разнообразить «базу», обогатить математику новыми разделами.

«Мы не имеем права, – считает Бугаев, – распространять область непрерывности на все явления природы. Для этого у нас нет ни логических, ни фактических оснований»[6]. Конечно, простейшие законы природы выражаются аналитическими функциями, и непрерывность есть действительно присущее и основное свойство явлений, связанных с этими законами. Однако, как уже отмечалось выше, для Бугаева одной непрерывностью объяснить мир полностью не представлялось возможным: «аналитическое же объяснение мировых явлений при помощи одних непрерывных аналитических функций недостаточно. Кроме анализа, в математике существует

---

[3] Бугаев Н.В. Математика и научно-философское миросозерцание // Дневник X Съезда русских естествоиспытателей и врачей. – Киев, 1898. – С.6.
[4] Там же. – С. 13.
[5] Там же. – С. 12.
[6] Там же. – С.14.

аритмология, кроме непрерывных функций – прерывные»[7]. Область применения идеи прерывности не должна ограничиваться математикой: Бугаев распространял понятие прерывности на область гуманитарных наук, стремился дать принципиально новое разрешение ряда вопросов философии и культуры, внести новые черты в мировоззрение.

«Истинное научно-философское миросозерцание, – утверждает Н.В. Бугаев, – не есть только миросозерцание аналитическое, а математическое, то есть вместе аналитическое и аритмологическое»[8]. Однако здесь речь идет не просто о синтезе двух равноправных областей математики, а скорее о том, что непрерывные функции подчиняются прерывным: «можно даже сказать, что непрерывность есть прерывность, которой изменения идут через бесконечно малые и равные промежутки»[9]. Следовательно, вместо аналитического «непрерывного» миросозерцания Н.В. Бугаев предлагает прерывное (аритмологию) как более целостное миропонимание.

По мнению ученого, в XX веке грядет грандиозная смена мировоззрений: аналитическое (в основе которого лежит идея непрерывности), господствовавшее в идеологии Нового времени вплоть до XIX века включительно, заменится аритмологическим. Кроме того, Бугаев указывает, что только с помощью прерывных функций будет возможно рассматривать и такие области знаний, которые до сих пор были недоступны для точных наук и важнейшие моменты которых заключаются не столько в их всеобщих чертах, сколько в индивидуальных и самостоятельных особенностях. Русский математик имеет в виду изучение отдельных молекул в химии, наблюдение клеточного построения в биологии, исследование человеческой психологии и сознания, вопросов эстетики, этики и т. д. «Природа не есть только механизм, а организм, в котором действуют с напряжением всех сил самостоятельные и самодеятельные индивидуумы». «Прерывность всегда обнаруживается там, где появляется самостоятельная индивидуальность. Прерывность подмечается также и там, где появляются эстетические и этические задачи»[10]. Истины аритмологии носят в себе печать своеобразной индивидуальности, привлекают к себе своей таинственностью и поразительной простотой.

Таким образом, основываясь на философско-математических работах Бугаева, можно сделать вывод, что арифметическая составляющая математического знания, лежащая в основании аритмологических дисциплин, содержит, по мнению Бугаева, богатый потенциал для описания и понимания того среза реальности, который недоступен аналитическому способу познания. Расширив аритмологическую часть математики, Бугаев придает ей мировоззренческий характер. В сфере

---

[7] Там же. – С.15.
[8] Там же. – С. 17.
[9] Там же. – С. 6.
[10] Там же. – С. 17, 16.

собственно философии аритмология у Бугаева воплощается в монадологию, явившуюся обновленными аритмологическими мотивами вариантом монадологии Лейбница и призванную «дополнить аналитическое мировоззрение». Бугаев справедливо считает немецкого философа предтечей своей «эволюционной монадологии»: «Лейбниц, основатель исчисления бесконечно малых, первый формулирует идею о прогрессе, как идею о постепенном усовершенствовании общества. Он, положив прочные основы для развития математического анализа, значительно содействовал укреплению аналитического миросозерцания. Он сам считал себя творцом начала непрерывности. Он же сознавал и недостаточность его для объяснения всех мировых явлений. Его монадология имела в виду дополнить аналитическое миросозерцание и дать философский отпор наклонности к рационализму и универсализму некоторых философов. В ней он показал, какое важное значение имеют… сами индивидуальности в мировом порядке. В этом сказалось глубокое философское чутье великого математика»[11].

Цель «Эволюционной монадологии» – выявить в многообразии проявлений «внешнего и внутреннего мира» некий «каркас», структуру, подобную математической, описать ее, максимально используя возможности математического языка, и таким образом прояснить различные процессы, происходящие в природе, обществе, культуре.

Основные положения, раскрываемые в «Эволюционной монадологии», таковы: 1) монада есть единица (элемент, индивидуум); 2) монада есть живая единица, самостоятельный и самодеятельный индивидуум[12]. Роль понятия монады в отношении многообразия мировых явлений мыслится по образу и подобию единицы в отношении измеряемых единиц; математическая единица представляет собой «схему» для метафизического понятия монады, в аспекте ее единичности: «Под именем меры в математике разумеют величину, с которой сравнивают другие величины того же рода. Под именем конкретной математической единицы разумеют *постоянную* меру, с которой сравнивают другие величины того же рода. От рода величины зависит выбор этой единицы. Эта условность устраняется, коль скоро мы останавливаемся на отвлеченной математической единице», которая «характеризуется постоянством и не зависит от конкретного содержания»; «Монада есть то, что в целом ряде изменений остается неизменным. Она есть целое, неделимое, единое. Неизменное и себе равное начало при всех возможных отношениях к другим монадам и к себе самой. Она остается таковою для нашего сознания в некоторых сторонах своего самообнаружения»[13].

---

[11] Там же. – С. 117.

[12] Бугаев Н. В. Основные начала эволюционной монадологии // Вопросы философии и психологии. – М. 1893. – № 2/17. – С. 2.

[13] Там же.

Автор «Эволюционной монадологии» выдвигает оригинальные положения о монадах различных порядков и сложных монадах (в которых возникает новое единство, новая индивидуальность). Порядок монады вносит разрывы в непрерывный процесс внутримонадных изменений, а диады, триады и так далее аритмологически варьируют тип соединения монад. Кроме того, монады Бугаева «вступают во взаимные отношения». Эти отношения есть отношения «любви». В связи с этим положением Бугаев различает два закона: 1) монадологической инерции – «монада не может собственною деятельностью вне отношения к другим монадам изменить всего своего психического содержания»; 2) монадологической солидарности – «монады развиваются некоторыми сторонами своего бытия, только вступая в соотношения с другими монадами». «Мировой процесс с внешней точки зрения приводит к последовательному образованию и распадению монад сложных порядков»; комбинации возникают и распадаются, но бесконечное множество монад-единиц образует все более совершенную, гармоничную и прекрасную аритмологическую конструкцию[14].

Конечная цель совершенствования монад – «с одной стороны, поднять психическое содержание монады до психического содержания целого мира, с другой – целый мир сделать монадою... снять различие между миром и монадою и достигнуть для того и другого бесконечного блага»[15]. Итак, мир, по Бугаеву, есть собрание громадного числа простых и сложных монад различных порядков, взаимодействущих между собой. Употребление слов «дерево», «собака», «человек», «человечество», «государство» и т. д. – способ рассуждать о монадах различных порядков. Говорим мы о «материи» или «духе», зависит от того, в каких терминах – «внешнего или внутреннего изменения» – мы обсуждаем взаимоотношения монад.

Простейшей формой монадного взаимодействия являются физические законы природы. На высших ступенях монады стремятся к взаимному совершенствованию при посредстве этических законов «поднятия и подъема». То есть самим монадам присущи силы космизации, силы борьбы с вселенским хаосом: «Хаос, в котором царят только вероятности и случайности, есть первоначальное состояние несовершенного мира». Однако «основа жизни и деятельности монад – этическая: совершенствоваться и совершенствовать других...»[16]. Это в высшей степени оригинальное воззрение Бугаева позволяет ему, с одной стороны, связывать явления природы и явления социальной жизни, а с другой стороны, распространять на все мировое целое моральные принципы: «Мир увеличивает потенции монады, подвигает ее экстенсивное

[14] Там же. – С. 28; 7, 11-13, 16.
[15] Там же. – С. 31.
[16] Там же. – С. 42; 37.

совершенствование, а монада пытается увеличить в мире интенсивное совершенствование. Она пытается осуществить в мире внутреннюю гармонию, превратить его в художественное здание, в котором целое соответствовало бы частям, а части целому. Из взаимного их совершенствования, экстенсивного и интенсивного, вырабатывается их взаимное согласие и соответствие»[17].

Итак, по мнению Бугаева, анализ, аритмология, геометрия и теория вероятностей дают все элементы для выработки коренных основ «научно-философского миросозерцания»: «Аритмологическая точка зрения дополняет аналитическое мировоззрение. Точки зрения анализа и аритмологии в своей совокупности составляют вместе одно математическое понимание явлений. Наконец там, где они не подчиняются правильным законам, приложимо учение о случайности. Из совокупного применения всех этих отделов математики образуется истинное научно-философское миросозерцание»[18].

Таким образом, в учении Н.В. Бугаева математические конструкции выступают в качестве фундамента для метафизического построения. Чтобы такое построение претендовало на целостность, в сам фундамент вносятся изменения, то есть математика обогащается новыми разделами. Дополнив анализ непрерывных функций аритмологией, Бугаев вносит в эту процедуру философское содержание. Тем самым осуществляется «гармоничное познание, координируемое по специальным отделам в правильных математических рамках»[19].

Благодаря аритмологии, математика, по Бугаеву, становится звеном, связывающим науки внешнего и внутреннего миров: «Человек стремится, при помощи числа и меры, возвыситься до идеального состояния, которое обусловливало бы полную власть над внешнею и внутреннею природой и вносило бы гармонию и эстетическое чувство в каждое проявление человеческого духа …при помощи математических истин самым лучшим образом складывается удовлетворение материальных нужд и вносится гармония и порядок в миросозерцание»[20]. Арифметическая составляющая математического знания в контексте аритмологии значительно повышает познавательный потенциал математики и является необходимым компонентом для построения целостной картины мира.

Аритмологические идеи Н.В. Бугаева были развиты его последователями – представителями Московской философско-математической школы В.Г. Алексеевым и П.А. Некрасовым. Виссарион Григорьевич Алексеев трудился в русле применения результатов и

---

[17] Там же. – С. 41.

[18] Бугаев Н.В. Математика и научно-философское миросозерцание // Дневник X Съезда русских естествоиспытателей и врачей. – Киев, 1898. – С.17.

[19] Там же. – С.18.

[20] Бугаев Н.В. Математика как орудие философское и педагогическое: Речь, произн. в торжеств. собрании Имп. Моск. ун-та 12.01.1869. – 2-е изд. – М., 1875. – С. 28.

методов аритмологических дисциплин, главным образом комбинаторики и теории инвариантов, – в химии. Его работы в этом направлении были оценены современниками и занимают достойное место в истории науки[21]. Алексеев также намечал пути аритмологической антропологии[22]. Павел Алексеевич Некрасов, математик, социолог и философ, специалист в области теории чисел и теории вероятностей, приложил немало усилий для внедрения аритмологических методов в социологию, право, финансовую теорию, теорию страхования и т. д.[23]. Идеи аритмологии, развитые в общем виде, оказались весьма плодотворными и, попав на почву самой математики, принесли обильные плоды в рамках всемирно известной Московской школы теории функций, одним из основателей которой был Николай Николаевич Лузин, друг П.А. Флоренского.

Сам П.А. Флоренский, восприняв аритмологические идеи своего учителя Н.В. Бугаева, пришел к выводу, что аналитическое миросозерцание, в основе которого лежали дифференциальное и интегральное исчисления, не способно объяснить свободу, веру, подвиг, творчество, красоту; оно противостоит всему случайному, связано с «ужасом прерывности», от которого пора избавиться – в мире господствует прерывность в отношении связей и дискретность в отношении самой реальности, и XX век принесет изменения в господствующее мировоззрение.

Во введении к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» Флоренский писал: «Если математика подчеркнула идею непрерывности, и конкретизация этой идеи вызвала однобокость миросозерцания и вместе с тем ряд поучительных диссонансов и даже глубоко фальшивых нот, то можно было бы ожидать, что критика такой идеи уничтожит односторонность, если она незаконна, и санкционирует ее, если она необходима»[24]. В работе «Об одной предпосылке мировоззрения» мыслитель указывал источник такого изменения: так как понятие непрерывности возникло в области математики, то вполне естественно, что именно она захочет с течением времени исправить односторонность миросозерцания, которую она же непреднамеренно вызвала в умах целых поколений.

В связи с увлечениями еще в молодости идеями Г. Кантора, предложившего свое учение о множествах в целях, в частности, обоснования арифметики действительных чисел, Флоренский делает

[21] См.: Алексеев В.Г. О совпадении методов формальной химии и символической теории инвариантов. – СПб., 1901.

[22] См.: Алексеев В.Г. Математика как основание критики научно-философского мировоззрения: По исследованиям Г. Тейхмюллера, Ал.Ф. Эттингена, Н.В. Бугаева и П.А. Некрасова в связи с исследованиями автора по формальной химии. – Юрьев, 1905. – С. 26).

[23] См. Некрасов П.А. Философия и логика о массовых проявлениях человеческой деятельности. – М., 1902.; Его же. Теория вероятностей. 2-е изд. – СПб, 1912.

[24] Флоренский П.А. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» // Историко-математические исследования. – М., 1986. – Вып.30. – С. 161.

попытку дать «теоретико-множественное» обоснование фундаментальной мировоззренческой значимости математических теорий. Сложное переплетение аритмологии Бугаева и теоретико-множественных представлений Кантора определяет специфику понимания Флоренским математики, определяет особенности ее функционирования в составе его творчества.

П.А. Флоренский дал теории множеств Г. Кантора оригинальное философское истолкование и нашел, таким образом, аргументы в пользу аритмологии и монадологии Н.В. Бугаева. Принцип непрерывности влечет за собой невозможность «от одного крайнего перейти к другому без промежуточного… Нет раскрывающегося в явлении общего плана, объединяющего собой его части и отдельные элементы»[25]. Источник перестройки миросозерцания, согласно положениям Флоренского, лежит в «теории групп» («Mengenlehre»; сейчас переводится как «теория множеств»). Применение понятийного аппарата канторовской теории множеств является оригинальным привнесением в идею философско-математического синтеза Н.В. Бугаева. Из утверждения Г. Кантора о том, что континуум есть связное и совершенное множество точек, Флоренский делает вывод в пользу бугаевской аритмологии: непрерывность есть частный случай, модификация прерывности.

Флоренский придает большое значение монадологии и связывает грядущее торжество аритмологии и монадологии с современными ему достижениями науки: «Эта индивидуальная расчлененность мира, его счетность занимает все более места в рождающемся ныне миропонимании... Молекулы, атомы, ионы, электроны… – все это имеет атомистический и монадный характер… Современная мысль возвращается к кшанам, моментам, чертам, мгновениям и т. п. древней и средневековой философии»[26].

Однако категории монадологии для Флоренского не логически контролируемая система метафизической терминологии, а способ символического описания переживаемого душой. Указывая на индивидуальность монад, о. Павел все же основной акцент делает на их единстве и цельности совместного существования: «Итак, я сказал «монада», т.е. некоторая реальная единица. Логически и метафизически она, как таковая, противопоставлялась бы прочим монадам, исключала бы их из сферы своего «Я», или же, потеряв свою особность, была бы захвачена прочими монадами и слилась бы с ними в неразличимое, стихийное единство. Но в тех духовных состояниях, о которых идет речь, ничто не теряет своей индивидуальности; все воспринимается как внутренне, органически связанное друг с другом, как спаянное свободным подвигом самоотвержения, как внут-

[25] Флоренский П.А. Пифагоровы числа // Труды по знаковым системам. – Вып. 284. – Тарту, 1971. – С. 504.

[26] Там же. – С. 505–506.

ренне-единое, внутренне-цельное, – одним словом, как много-единое существо»[27].

Находясь под влиянием математических работ конца XIX – начала XX веков, Флоренский считает основными математическими идеями «группу» («множество») и «функциональную зависимость между группами», о чем свидетельствуют следующие выдержки из его работ. «Если мы познаем бытие с точки зрения формы, то идея группы, как синтез множества с единством, есть основная категория познания… всякий, начинающий построять свое миросозерцание, желающий дать рациональные схемы, должен иметь в виду сказанную идею группы, и, можно утверждать, тогда только философ приступает к собственно-философской работе, когда он отчетливо сознает эту идею»[28]. «Следующая основная идея математики – идея функции и функциональной зависимости между группами – находит свое применение всякий раз, когда сознание производит синтез двух или большего числа групп с сохранением их индивидуального единства, то есть там, где группы приводят в активность сознание, с одной стороны, удерживая элементы групп распределенными в их первоначальном единстве между собой, а с другой стороны, образовывая новую группу, высшего порядка… вторая основная идея математики применима там, где начинается рефлексия»[29].

Таким образом, выделенные Флоренским идеи имеют такую общность, что оказываются применимыми везде, где только «начинается рефлексия» и «функционирует сознание». Изучаемые в математике, они составляют формальную основу всякого размышления, и, следовательно, получаемые в рамках математики положения могут быть вполне законным образом использованы и за ее пределами.

Разрабатывая проблему бесконечности, Флоренский следует за Кантором, акцентируя и усиливая «трансцендентальное» звучание теории множеств. Он различает актуальную бесконечность в качестве неизменности и потенциальную бесконечность в виде возможности рекурсивного «вычерпывания» актуальной бесконечности, изменяя пошагово количественный показатель. Это дает Флоренскому возможность сочетать традиционно осознаваемые тождественными себе метафизические сущности (актуальная бесконечность в виде Абсолюта определяется как Бог) с текущими изменениями жизни без гностического их противопоставления. Трансфинитные числа и типы есть «символы бесконечного», то есть формы, в которых актуальная бесконечность

[27] Флоренский П.А. Столп и утверждение Истины. Опыт православной теодицеи в двенадцати письмах // Флоренский. Сочинения: в 2 т. – М., 1990. – Т.I (1–2). – С. 324–325.

[28] Флоренский П.А. От переводчика. Вступительная статья к переводу «Кант И. Физическая монадология» // Богословский вестник. – Сергиев Посад, 1905. – Т.3. – № 9. – С. 95.

[29] Флоренский П.А. О типах возрастания // Флоренский П.А Сочинения: в 4 т. – Т.1. – М., 1994. – С. 284–285.

существует в духе (in abstracto), познающем «Transfinitum в природе и до известной степени Absolutum в Боге»[30].

Одним из наиболее ярких примеров выражения связи потенциальной бесконечности и актуальной бесконечности служит соотношение между рациональными и иррациональными числами. В главе «Иррациональность в математике и догмате» книги «Столп и утверждение Истины» Флоренский рассматривает бесконечное множество рациональных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ..., a_{n+m}, ...,$ расположенных в порядке написания так, что $a_1>a_2>a_3>...>a_{n+m}>...$ Взгляд на подобный ряд как на некоторый единый объект α позволяет символически выразить α в виде равенства по определению:

$\alpha = def\,(a_1,a_2,...,a_n,..., a_{n+m},...).$

Полагание α чем-то единым, или целостным, оправдывается действительно только тогда, когда эта последовательность сходится. Фундаментальные последовательности, не имеющие рациональных пределов, отождествляются с иррациональными числами. Этот способ введения иррациональностей, предложенный Кантором, используется Флоренским как образец символического постижения актуально бесконечного в его отношении к конечному и характеризуется им в категориях имманентного и трансцендентного.

Математическая конструкция – введение иррационального числа – служит схемой для мысли, стремящейся к постижению отношений Бога и тварного мира. Если мы попробуем ограничиться только множеством рациональных чисел, то обнаружим его несамодостаточность. Например, извлечение квадратного корня в этом множестве в ряде случаев выполняется, в ряде – нет. Исследование внутренних особенностей этого множества, коль скоро мы стремимся к полноте и законченности, вынуждает нас выйти за его пределы. Применяя этот вывод к вопросу о возможностях и границах рационального мышления, Флоренский утверждает несамодостаточность рассудка и необходимость сверхрассудочного синтеза. Переходя к α, мы совершаем скачок, разрывается круг конечных понятий рассудка, и исследователь вступает в новую среду – среду сверхконечного, «рассудку недоступного и для него нелепого»[31].

Иррациональное число α вводится как класс эквивалентностей фундаментальных последовательностей $\{a_i\}$ рациональных чисел. Для этих классов определяются арифметические действия и отношение порядка. Рациональные числа $a_1,a_2,...,a_n,..,$ из которых мы составляем фундаментальные последовательности, и α – «существенно несравнимые символы»; иными словами, α трансцендентно для всякого конкретного a_i. Но после

---

[30] См. Флоренский П.А. О символах бесконечности//Флоренский П.А Сочинения: в 4 т. – Т.1. – М., 1994. – С. 86.

[31] Флоренский П.А. Столп и утверждение Истины: Опыт православной теодицеи в двенадцати письмах. – С. 513.

того, как мы перешли к рассмотрению чисел как классов эквивалентностей фундаментальных последовательностей, мы можем и a_i понять единообразно с α (всякое рациональное число, как и иррациональное, класс таких последовательностей, чем и достигается единство взгляда на действительные числа). А это значит, что хотя α трансцендентно для всех a_i, «непостижимо» с точки зрения a_i, но все a_i имманентны для α, насквозь для него прозрачны. Можно сказать, что с точки зрения a_i нельзя видеть всех трансцендентных корней a_i, того трансцендентного освещения a_i, которое, однако, явно и очевидно с точки зрения α: «Имманентность и трансцендентность в области сущностей разума подобна таковым же в области сущностей онтологии: Бог трансцендентен для мира с точки зрения мира, но мир не трансцендентен Богу, а всецело пронизывается Божественными энергиями»[32].

В работе «Пифагоровы числа» Флоренский выделяет наряду с лейбницевским «принципом непрерывности» (в том его понимании, которое господствовало в XIX веке) тесно связанный с ним принцип «изгнания понятия формы»[33]. Наоборот, где обнаруживается прерывность, «там мы ищем целого; а где есть целое – там действует форма и, следовательно, есть индивидуальная отграниченность действительности от окружающей среды. Иначе говоря, там действительность имеет дискретный характер, есть некоторая монада, т.е. замкнутая (конечно, относительно) неделимая единица. Значит, там возможен счет»[34]. Однако «сосчитать – значит изобразить», и число изображенное есть «первичная категория бытия и мышления», она есть «индивидуальность», «первоорганизм», «схема и прообраз всего устроенного и организованного»[35].

Высоко оценивая учение Г. Кантора о «порядковых числах», Флоренский отмечает: «Если бы теория кратно-протяженных типов была достаточно разработана, то одним числом выразилось бы сложнейшее строение объектов природы, и познанию действительности, как царству форм, было бы выковано могущественное орудие»[36]. Русский философ реабилитирует пифагорейское представление о выразимости всего целым числом, показывая, что современное понимание вполне согласуется с ним. Числовая прерывность формы выступает характерной категорией мысли, число, как когнитивная форма, улавливает внутренний ритм космоса, его пифагорейскую музыку, музыку небесных сфер[37].

---

[32] Там же. – С. 512.
[33] Флоренский П.А. Пифагоровы числа. – С. 632–633.
[34] Там же. – С. 634.
[35] Там же. – С. 637, 643.
[36] Там же. – С. 639.
[37] Кроме работы «Пифагоровы числа», теме формы Флоренский посвящает большие разделы «У водоразделов мысли»: «Воплощение формы» и «Понятие формы» (см. Флоренский П.А. Сочинения: в 4 т. / Священник Павел Флоренский; сост. и общ. ред. игумена Андроника (А. С. Трубачева) и др. – М.: Мысль, 1999. – Т. 3(2)).

В упомянутой выше студенческой работе «Идея прерывности как элемент миросозерцания» начинается путь, который в более поздних сочинениях П. А. Флоренского приводит к смещению акцентов с критики аналитического мировоззрения и выявления дискретного аспекта миропонимания на связь «линии принципа непрерывности» с «линией изгнания формы». Достигается более глубокое проникновение в диалектику непрерывного и дискретного аспектов картины мира в направлении, смутно угаданном еще Лейбницем[38]. То, что кажется разрывным нам, подчинено закону, формуле, известной Богу. Наша задача – за внешней видимостью хаоса, разрыва разглядеть закон, порядок – формулу. У Флоренского этой формуле соответствует форма, раскрывающая в явлении общий его план, объединяющая собой его части и отдельные элементы. Разрывность цельного и индивидуального явления (формы) в видимом мире – кажимость, в мыслях же Бога такое явление связно и выражается единым законом, формулой. Задача мыслителя – постараться увидеть (угадать) этот закон, найти эту формулу, для чего необходимо пристальное внимание ко всем разрывным явлениям в природе, ибо только через все эти разрывы, через глубокое их изучение мы сможем приобщиться к тайнам мироустройства, тайнам целого.

Тема формы получает свое дальнейшее развитие и раскрывается в работах, изданных под общим названием «Понятие формы», составляющих третью часть цикла «У водоразделов мысли». Рассматривая природу термина как орудия, Флоренский возвращается к вопросу о соотношении орудия и организма. В организмах есть подвижная, непрестанно текущая, непрерывно меняющаяся сторона: самая жизнь. Но есть и другая сторона, неподвижное явление жизни, форма организма. «Именно формою своею орудия уподобляются организмам, но – совсем не прямо – противоположным жизни своим неподвижным и твердым содержанием… Целостность – вот общий признак, характеризующий произведения жизни»[39]. Раскрывая категорию целого, Флоренский выделяет четыре основных и взаимосвязанных аспекта: формальный (онтологический) – совершенство, действующий – жизненная сила, материальный – полнота, целевой – красота. Ставя задачу «уяснить себе то же диалектически», мыслитель подходит к понятию о «золотом» или «божественном сечении».

Будучи единым в себе самом, целое является в пространстве и во времени как множество, то есть целое – это единство многоразличного и прежде всего единство двоицы, так как простейшее множество – это дво-

[38] «По-моему, – пишет Лейбниц, – есть веские основания полагать, что все различные роды существ, совокупность которых образует универсум, в мыслях четко знающего их сущностные градации Бога, до такой степени подчинены одной и той же формуле, что единство нарушалось бы, если бы мы смогли между двумя ее последовательными решениями найти какие-то промежуточные; это было бы свидетельством беспорядка и несовершенства» (Лейбниц Г.В. Два отрывка о принципе непрерывности // Лейбниц Г.В. Сочинения: в 4 т. – М., 1982. – Т. 1. – С. 213).

[39] Флоренский П.А. <Понятие формы> Целое // Флоренский П.А. Продолжение наших чувств / Флоренский П.А Сочинения: в 4 т. – Т.3(1). – М., 1998. – С. 454–455.

ичность. Единство во множестве, по Флоренскому, называется идеей. Полюсы, являющие идею, будучи неразрывны, в то же время и взаимопротивоположны. Идея, единая в себе, является как сопряженность антиномически противолежащих полюсов, – как антиномия: «полюсы – это начало и конец явления свехчувственного в области чувственной, места входа и выхода ИДЕИ в мир эмпирический»[40].

Чтобы единство проявлялось эмпирически, связь многообразия должна иметь внешнее, наглядное, пространственно-временное выражение и должна быть дана как некоторое отвлеченное отношение частей множества. «Если множество вообще открывается как полярно-сопряженная двойственность, то и закон связи полюсов должен быть выразим, как некоторая общая формула единства»[41]. Флоренский ставит задачу попытаться вывести эту формулу. Части не могут быть равны, ибо тогда было бы безразличие их и взаимозаменяемость. Таким образом, искомая формула соотношения частей должна возникнуть из сравнения частей. Таким сравнением может быть лишь измерение одной части другою. Более того, сопоставление частей может быть лишь внутреннее, не выводящее за пределы самих отрезков и не вносящее ничего произвольного, то есть сравнение может быть лишь путем измерения одного отрезка другим, и формула будет иметь вид m/M (вид отношения меньшей части отрезка большей). Однако мера сравнения частей должна быть и мерою целого при сравнении с одною из частей. Эта последняя часть должна быть соединительным звеном для мысли при переходе от другой части к целому. Следовательно, она должна быть большею, чем другая часть, во столько же раз, во сколько целое больше ее. Иначе говоря, отношение частей должно являть в себе отношение целого к части, то есть то число, которое характерно для целого, измеренного своею частью, своим содержанием, должно быть характерно для всех отношений дальнейших делений или расчленений целого, при непрерывности промежуточного звена – меры – большей части деления. Этим числом и является «золотое сечение». Таким образом, Флоренский дает философское основание числовому соотношению, повсеместно обнаружимому как в природе, так и в человеческой культуре: выведение золотого сечения строится исходя из идеи целого, раскрывающегося, являющегося в пространстве и во времени.

Полагая пространство и время взаимосвязанными, о. Павел утверждает, что раскрытие целого во времени также подчинено закону золотого сечения. Смысл золотого сечения во времени заключается в инвариантности роста. Это – оригинальный вклад мыслителя в рассматриваемую проблему. Если понимать жизнь как явление целого во времени и выбрать в качестве ее полюсов смерть и рождение, то поворотным пунктом, расчленяющим биографию золотым сечением, будет тот момент, когда рождение закончи-

[40] Там же. – С. 462.
[41] Там же. – С. 463.

вается, а смерть начинается. Однако кроме внутренней точки золотого сечения есть еще и внешняя. Она приходится влево от точки рождения, если жизнь представлять под образом несомкнутого в себе отрезка. Размышления над вопросом, чему соответствует эта точка, приводят Флоренского к оригинальной концепции биологического времени.

«Естественно предположить, – пишет мыслитель о внешней точке золотого сечения, – что она выражает minimum жизненного проявления, тогда как точка внутренняя – maximum. Если сей maximum есть maximum дневного сознания, а minimum – minimum его же, то можно иначе сказать, что вторая точка золотого сечения есть maximum ночного сознания, а первая точка – minimum ночного сознания… Какому же моменту времени соответствует minimum дневного сознания – т.е. сознание, наиболее завитое в недра пещерного мрака?»[42]. Момент внешнего золотого сечения биографии значительно предшествует моменту зачатия, физически рассматриваемого, следовательно, или момент золотого сечения соответствует иному событию, нежели зачатие физическое, то есть, другими словами, самое зачатие духовное, первая ступень сознания, совершается значительно раньше зачатия физического; или же надо вести счет времени утробного существования младенца, а может быть – и вообще счет биографического времени, годами биологическими, а не астрономическими: в утробе иная хронология, своя, в основу которой следует положить представление о росте организма: «Рост, жизнь делает время, а не время движет жизнь. Следовательно, процессами жизни должно измерять биографическое время, а не временем – процессы биографического роста»[43].

Флоренский утверждает, что закон золотого сечения действительно осуществлен в природе. Вариантов его осуществления много, но их общее начало есть бытие в своем явлении: «золотое сечение есть закон ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ, и именно, как уяснено ранее, выражает строение ЦЕЛОГО как такового… Действительность, там, где она отступает от этого закона, побуждает нас утверждать истинность этой НОРМЫ нашего мышления и ее, потому, НЕПРЕЛОЖНОСТЬ и искать причины отступления от нее и неправильностей в способе ее применения»[44].

Таким образом, П. А. Флоренский предлагает блестящий пример философско-математической работы, отражающей процесс взаимодействия философии и математики, при котором математические формулы наполняются жизненным содержанием, а философские идеи получают наглядную интерпретацию. Более того, мыслитель находит конкретные приложения представленным изысканиям, а именно своей идее расчленения времени золотым сечением. В частности, понимая поэзию как искусство во времени и видя ее задачу в расчленении времени, заменяя расчленяемое раз-

[42] Там же. – С. 476–477.
[43] Там же. – С. 477.
[44] Там же. – С. 485.

ным эмоциональным и вообще психическим содержанием, Флоренский утверждает, что произведение поэтического искусства (особенно драматического) как целое, как замкнутый в себе мир должно подлежать закону золотого сечения. И чтобы мысль не была голословной, он приводит примеры античных трагедий, показывая, что в них реализован принцип золотого сечения.

Результаты, полученные Флоренским в русле развития философско-математического синтеза, являются, по сути, развертыванием его мысли о том, что «все возможные закономерности бытия уже содержатся в чистой математике»[45]. То есть не существует «чисто математических» (или «чисто научных») проблем, так как решение любой из них выводит далеко за рамки математического (научного) исследования – в области философии, богословия, иконологии и так далее. Таким образом, согласно концепции Флоренского, математические конструкции отражают структуру бытия, и открытие новых математических теорий (аритмология, теория множеств и т.д.) – существенный довод за утверждение нового видения реальности.

Анализ философско-математических работ П.А. Флоренского свидетельствует о его солидарности в Н.В. Бугаевым в приверженности пифагорейскому пониманию математики: «Все есть число», а также о его стремлении понять число как форму. Конечно, как Бугаев, так и Флоренский далеки от пифагорейского синкретизма, в котором отсутствует демаркация философского и математического. Однако в вопросе об отношении категории числа к действительности и процессу познания творчество обоих мыслителей демонстрирует ярко выраженные пифагорейские тенденции.

Математика и в жизни, и в философии младшего современника П.А. Флоренского Алексея Федоровича Лосева играла одну из главенствующих ролей, будучи связана, особенно в его античных штудиях, с астрономией и музыкой. В молодости Лосев тесно общался с известными математиками Н.Н. Лузиным и Д.Ф. Егоровым, близкими ему не только в связи с наукой, но и глубоко мировоззренчески, в плане философско-религиозном, и, в частности, в плане имяславия. Известно, что Лосев серьезно занимался рядом математических проблем, особенно анализом бесконечно малых, теорией множеств, теориями комплексного переменного, пространствами разного типа.

Мысли о единении философии, математики, астрономии и музыки, характерные для античной культуры и полностью разделяемые Лосевым, выражены им в книге «Античный космос и современная наука». А.Ф. Лосеву принадлежит грандиозная работа по возвращению античных учений о числе «впервые на память современности»[46]. Перевод и сжатое, отрабо-

---

[45] Цит. по: Половинкин С.М. О студенческом математическом кружке при московском математическом обществе в 1902–1903 гг. // Историко-математические исследования. – Вып. 30. – М., 1985. – С. 148–158.

[46] Лосев А.Ф. Диалектика числа у Плотина // Лосев А.Ф. Бытие – Имя – Космос. – М., 1994.– С. 718.

танное в рамках современной терминологии резюме трактата Плотина «О числах», анализ «Теологумен арифметики» Ямвлиха (и его школы), где исследователь обнаруживает исконно античную линию конструирования мироздания от хаоса к космосу, философская расшифровка числовых операций демиурга в космогонии «Тимея» на страницах «Античного космоса и современной науки» как образец интереснейшего прочтения античных числовых комплексов, и, наконец, разбор иерархии «богов-чисел» у Прокла, начатый в «Диалектике числа у Плотина» и завершенный в томе VII «Истории античной эстетики», – таков обширный и благодатный материал, предложенный Лосевым для рассмотрения античной философии числа в свете наших дней. Лосев демонстрирует удивительную способность проникать во «внутренние изгибы» античной мысли и переводить их, вопреки всем трудностям языка и сложности логических конструкций мысли, на язык современного философского сознания. Благодаря этому «переводу» античная математика, столь непохожая на современную, одновременно обнаруживает в зародыше, в потенции много общего с ней.

Так, выявленная Лосевым структурность числа античности, «детства человечества», согласуется с недавними наблюдениями в рамках «генетической эпистемологии» школы Ж. Пиаже. Эти наблюдения показали, что усвоение понятия числа возникает у детей сначала (между 4 и 7 годами) в результате логических операций группировки и упорядочивания объектов, то есть через структурирование, и только потом (к 7–8 годам) появляются навыки привычного счета посредством представления об «n+1». В современной математике к числу фундаментальных структур относятся порядковые структуры (наряду с алгебраическими и топологическими). По мнению Пиаже, структуры порядка, так же как алгебраические и топологические, являются фундаментальными не только для здания математики, но и для механизма мышления. Эти структуры соответствуют элементарным структурам мышления и являются их формальным продолжением.

Далее, античное «число понимается как модель-регулятор всего бытия», заключает Лосев по поводу «числовой мистики» Платона и всерьез предлагает находить у античного мыслителя приемы и методы кибернетики и даже «считать Платона безусловно отцом или прародителем» этой науки[47]. Исследователь выделяет также иерархийно–порождающую функцию античного числа: число строится не механическим наращиванием однородных единиц, но расчленением и саморазделением органического единства – посредством диалектики одного и иного, предела и беспредельного, сущего и меона, целого и части. Это открытие древнегреческого гения в новых условиях воскресает в основе современного системного подхода.

Таким образом, в античных взглядах на число явно прочитываются, благодаря исследованиям А.А. Лосева, предвосхищения многих значи-

[47] Лосев А.Ф. История античной эстетики. Софисты. Сократ. Платон. – М., 1994. – С. 326, 313.

тельных достижений или тенденций современной науки и культуры в целом.

На основании исследований античного пифагорейско-платонического понимания математики А.Ф. Лосев предпринимает попытку построить свою философию числа, предложенную в обширном, но, к сожалению, не оконченном труде «Диалектические основы математики», в котором «основоположения числа» естественно перерастают в аксиомы и теоремы собственно математики. Понимая число как особую форму бытия, возникающего на почве субъект–объектного безразличия, Лосев относит его к сфере смысла и называет математику наиболее отвлеченной сферой чистого смысла. Число как без-качественная вне-содержательная смысловая структура есть форма, или, точнее, тип чистого смыслового полагания, форма смысловой положенности. Полагание Лосев понимает по Канту, как категорию рассудка, как примитивное, до-теоретическое усмотрение, основа любых построений.

Лосев четко отделяет число от количества и величины и одновременно диалектически связывает все три категории. Количество предполагает переход числа в «инобытие» и применение числа для осознания (пересчета) этого «инобытия». Таким образом, количество – функция, или проявленность числа в «инобытии». Величина же есть само «инобытие», осмысленное числом при помощи количества. Количество – смысл «инобытия», величина – та сторона вещи, которая получена в ней через исчисление, то есть величина всегда есть нечто измеренное, которое в свою очередь предполагает измерение и меру. Роль меры играет в данном случае число, измерение совершается при помощи количества, а измеренным оказывается величина.

Итак, число есть акт смыслового полагания, требующий для себя инобытия, в сфере которого совершается это полагание. Развертывая диалектическую схему становления числа как завершенного целого (супра-акт, ин-акт, контр-акт, инфра-акт, инфра-экстра-акт, энергийный акт, или полное число), Лосев выводит формулу числа: «Число есть ставший результат энергии самосозидания акта полагания подвижного покоя самотождественного различия»[48]. Таким образом, число как принцип самого первого различения есть мыслительный акт, необходимая категория мышления, а вся математика представляется как развитие и детализирование понятия числа. При этом число всегда понималось мыслителем не как голая и механически-безжизненная схема, но как жизненно трепещущая структура самой действительности. Математика в наиболее чистом виде отражает механизм превращения в сознании хаотического в структурно-смысловое, она есть созидание смыслового «скелета» бытия.

---

[48] Лосев А.Ф. Хаос и Структура. – М., 1997. – С. 98.

Итак, математика нуждается только в мышлении, а не в понимании. «В математике не может быть спора о том, как понимать те или иные аксиомы и теоремы, но только о том, как их мыслить, т.е. как их строить, как их формулировать и доказывать; и если в математике заходит речь о понимании, то это уже не есть чистая математика, это уже привнесение в математику совершенно нематематических, например философских, точек зрения»[49]. Таким образом, понимание – прерогатива философии с ее исконным методом – диалектикой, определяемой Лосевым как «антиномико–синтетическое конструирование сферы чистого смысла как самопорождающегося и самопреодолевающегося противоречия»[50]. Мышление оформляет бытие, понимание же заново перекраивает его, придавая ему новый стиль и новое единство; мышление создает смысловой скелет вещи, понимание исходит из вещи, которая в своем скелете несет также и живое тело.

Единство философии, математики и музыки стало предметом особого труда «Музыка как предмет логики». Музыка, согласно Лосеву, – искусство времени, а время в своей основе – становление. Главная особенность эстетического воздействия музыки состоит в том, что она дает возможность чувственного восприятия чистого становления, завораживает ощущением нераздельности конечного и бесконечного. Музыка есть выражение чистого времени. Время в свою очередь объединяет длящееся и недлящееся. Таким образом, время всегда предполагает число и его воплощение. Поэтому в музыкальной форме существуют три важнейших слоя – «число», «время», «выражение времени», а сама музыка есть «чисто алогически выраженная предметность жизни чисел…» или, вернее, «выражение этой жизни числа»[51]. Музыкальная форма тем самым является реализацией диалектического соотношения числа и времени. «Жизнь чисел – вот сущность музыки» – такова центральная идея труда Лосева «Музыка как предмет логики».

Таким образом, музыка теснейшим образом связана с числом, числовыми отношениями, математикой в целом и ее отдельными теориями. Только идеальность численных отношений можно сравнить с эйдетической (ειδοζ (эйдос) А. Ф. Лосев переводит как «смысл») завершенностью музыкальных образов. Сфера математики – идеальна, так как она не имеет дела с реальными пространственными телами и психикой и т. п. «Теорема верна или неверна сама по себе». К этой идеальной сфере относится и музыкальное бытие, а значит, в этом отношении «музыка и математика – одно и то же». Отсюда Лосев делает вывод о тождестве математического анализа и музыки в смысле их предметности. Ведь в музыке происходит «прирост бесконечно малых изменений», «непрерывная смысловая теку-

[49] Там же. – С. 50.
[50] Лосев А.Ф. Математика и диалектика // Лосев А.Ф. Хаос и Структура. – М., 1997. – С.799.
[51] Лосев А.Ф. Музыка как предмет логики // Форма–Стиль–Выражение. – М., 1995. – С. 510, 512, 562.

честь», неугомонность и «вечная ненасытимость», «беспокойство как длительное равновесие – становление»[52].

Однако в музыке и математике есть и свое решительное различие. Музыка живет выразительными формами, она есть «выразительное символическое конструирование числа в сознании». От математики музыка отличается как раз именно тем, что искусство живет «выразительным и символическим конструированием предмета», то есть способ конструирования предмета у музыки и математики разный: «математика логически говорит о числе, музыка говорит о нем выразительно», «музыка есть понимание и выражение, символ, выразительное символическое конструирование числа в сознании»[53]. Сами по себе представления о музыке как о звучащем числе не являются открытием Лосева (среди выразителей подобной точки зрения следует назвать в первую очередь Г. Лейбница и Ф. Шеллинга), однако его заслуга состоит в системном философском обосновании этих представлений, которые раньше высказывались как интуитивные прозрения.

Таким образом, многоплановое творчество А.Ф. Лосева предлагает яркий образец плодотворности пифагорейско-платонической традиции понимания философии и математики для исследования различных областей современной духовной культуры. Признание математики «любимейшей» из наук, восприятие ее в пифагорейско-платоническом ключе, стремление к синтезу математики и философии – все это сближает А.Ф. Лосева по духу творчества с Н.В. Бугаевым, П.А. Флоренским. Однако, если Бугаев и Флоренский работают в русле философско-математического синтеза, отражающего «равноуровневое» участие философии и математики в построении целостной картины действительности, то в творчестве Лосева можно выделить два плана рассмотрения проблемы взаимосвязи философии и математики: 1) философско-математический синтез, в рамках которого Лосев продолжает линию Бугаева и Флоренского, и 2) философия математики, где число становится непосредственным объектом философской рефлексии. Изложенные в данной статье идеи Бугаева, которые можно отнести к философии арифметики, «извлечены» из его аритмологических и монадологических построений. Число в понимании Флоренского также представляет собой результат реконструкции из его многочисленных произведений, в которых взаимодействие философии и математики направлено на раскрытие вопросов философского и, шире, мировоззренческого характера. Лосев же, кроме философско-математических построений, предлагает свой вариант философии числа в работе «Диалектические основы математики», анализ которой позволяет заключить, что Лосев углубляет пифагорейское понимание числа, диалектически прорабатывая три взаимосвязанные категории (число, количество, величина) и развертывая диалектическую схему становления числа как завершенного целого.

[52] Там же. – С. 492, 493, 494, 495.
[53] Там же. – С. 498, 499.

В. Я. Перминов
(Москва)

О СИСТЕМНОМ ПОДХОДЕ К ОБОСНОВАНИЮ МАТЕМАТИКИ

Статья посвящена описанию системного подхода к обоснованию математики. Рассматривается роль генезиса математических теорий для обоснования их непротиворечивости. Предлагается классификация типов очевидностей, входящих в теоретико-познавательный и онтологический фундамент различных составляющих математического знания.

Программы обоснования математики, предложенные в первой половине прошлого века, не увенчались успехом. Оказалось, что в рамках строгого математического рассуждения нельзя обосновать факт непротиворечивости даже самых простых математических теорий, таких как арифметика и евклидова геометрия. Мы уже долгое время стоим перед лицом тяжелого методологического парадокса: самая строгая из наук не имеет обоснования своей строгости и даже, как кажется, не имеет шансов его получить.

Выход из затруднения состоит, на мой взгляд, в переводе проблемы с уровня логического на уровень методологический. Мы должны рассмотреть математическую теорию как специфическую самоорганизующуюся систему, проходящую различные этапы своей зрелости, и должны попытаться обосновать то положение, что, восходя по ступеням зрелости, она неизбежно восходит к стадии высшей зрелости и полностью освобождается от внутренних противоречий, которые содержались в ней на начальных этапах ее развития. Замысел состоит в том, чтобы вынести суждение о непротиворечивости математической теории не из логического анализа готовой теории, а из соображений, относящихся к ее генезису, из изменения логической организации теории в процессе ее становления. Мы сделаем этот замысел более осязаемым, рассмотрев основные линии исторического вызревания математической теории.

1. Генетический базис математической теории

Математическая теория, как правило, исходит из некоторых объектов и связей, взятых из непосредственного рассмотрения свойств определенного рода идеализированных объектов. Эти объекты, свойства и связи образуют *генетический базис теории,* выступающий в виде системы изначально принятых утверждений. Арифметика появилась не из рассуждений о системах счисления или аксиоматиках, а из констатации самоочевидных фактов типа 2 + 2 = 4. То же самое можно сказать о геометрии, о теории вероятностей, о проективной геометрии, о началах дифференциального и интегрального исчисления и вообще о любой математической теории, родившейся на базе некоторого специфического опыта и связанной с ним интуиции. Всюду мы имеем генетический базис как общезначимый исходный пункт, с которого начинается развертывание теории.

Начиная с этого пункта теория развивается в двух направлениях: в сторону исследования более сложных объектов и отношений, построенных на базе исходных, и в сторону выявления основных принципов теории, то есть в сторону ее логического обоснования. На этом втором пути мы приходим к формулировке *логического базиса теории* и, в частности, к выявлению полной и непротиворечивой аксиоматики.

Логический базис теории вторичен, он формируется после генетического и зависим от него. Мы создаем аксиоматику, чтобы с единой точки зрения объяснить систему связей, которая нами уже принята. Это положение, вообще говоря, справедливо по отношению ко всем научным теориям, в том числе и нематематическим. Общие принципы любой науки не изобретаются, но навязываются ее содержанием, принятым на основе наблюдения и опыта. В математике, однако, отношение между генетическим и логическим базисом имеет некоторую специфику. Отметим здесь четыре момента, которые представляются важными.

1. Генетический базис математической теории дан нам как определенный в аподиктической очевидности и, вследствие этого, как предельно устойчивый. Опытные обобщения, из которых мы исходим в физике и которые составляют ее генетический базис, сплошь и рядом корректируются дальнейшим развитием теории и колеблются в границах своей истинности. Можно сказать, что в диалектике логического и генетического базиса эмпирической теории оба полюса подвижны: развитие идет через постоянную корректировку одного другим. Положение в математике существенно иное. Система представлений, составляющая генетический базис математической теории, будучи принята, не подвергается пересмотру. Свойства чисел, прямых и простых фигур заданы для нас однозначно и не изменяются вследствие их включения в систему дедуктивного вывода.

2. Математическая теория, в отличие от эмпирической, характеризуется жесткой связью между принципами (аксиомами) и фактами (интуитивно ясными положениями, относящимися к генетическому базису). В опытной теории противоречие между принципами и фактами может быть преодолено за счет дополнительных гипотез, не относящихся к принципам (гипотез ad hoc). Математическая теория является жесткой в том смысле, что такого рода дополнительные гипотезы не допускаются, и противоречие между аксиомами и фактами разрешается исключительно через корректировку аксиом. Если из некоторых принципов теоретической арифметики следует, что $2 + 2 = 5$, то это говорит о ложности по крайней мере одного из принятых принципов. Возможности сохранения принципов математиче-

ской теории через использование гипотез ad hoc в математике не существует.

3. В математической теории логический базис однозначно детерминирован генетическим. Никакая система фактов опытной теории не определяет однозначно ее принципов. Для одной и той же системы фактов опыта существуют различные наборы принципов, способных объяснить эти факты. В математике ситуация другая. Если мы, к примеру, приняли как истинные теоремы абсолютной геометрии и теорему о сумме углов треугольника, то принятие всех аксиом евклидовой геометрии становится неизбежным. Математическая теория характеризуется, таким образом, внутренней логической симметрией между аксиомами и теоремами: аксиомы, будучи заданными, предопределяют теоремы, а известная совокупность теорем, будучи принятой, задает аксиоматику. Таким образом, в математической теории не только теоремы следуют из аксиом, но и аксиомы строго следуют из теорем.

4. Важная особенность математической теории состоит в том, что становление аксиоматики достигает здесь предельного состояния, закрывающего возможность дальнейших ее изменений в смысле заключенного в ней содержания. В отличие от эмпирической теории для математической теории является осмысленным понятие абсолютно завершенной системы принципов. Появление первой несовершенной аксиоматики устанавливает относительное единство утверждений, выявляет логическую последовательность в их развертывании и позволяет сделать всю систему теорем более целостной и законченной. Анализ этой системы приводит к формулировке более полной и систематической аксиоматики и т. д. Мы имеем основание утверждать, что в математической теории, в отличие от физической, эта диалектика конечна, что она завершается достижением зрелой аксиоматики, формулировкой ее в такой форме, которая исключает дальнейшее ее совершенствование в плане заключенного в ней содержания.

Тезис, который предполагается здесь обосновать, состоит в том, что аксиоматика математической теории, достигшая состояния зрелости, является непротиворечивой. Для понимания оснований этого тезиса важно рассмотреть основные линии вызревания математической теории.

2. Уточнение доказательств

Первая линия логического вызревания математической теории – это повышение строгости доказательств.

Доказательства становящейся математической теории, как правило, неполны: они содержат в себе скрытые допущения, опираются на недостаточно строгие определения, апеллируют к очевидностям индуктивного характера и т.п. И. Лакатос был, несомненно, прав в том, что содержательное математическое доказательство должно пройти длинную дорогу совершенствования для того, чтобы достичь относительной корректности. Он указывал на три основных источника некорректности содержательных доказательств. Это недостаточная определенность понятий, участвующих в доказательстве, скрытые (явно не сформулированные) леммы, на которые оно опирается, и неизбежный слой неявного знания, который остается без разъяснения в силу его простоты или самоочевидности.

Важный вопрос состоит в том, достигают ли математические доказательства в процессе своего совершенствования предельной строгости, то есть такого качества вывода, которое не нуждается в дальнейшей корректировке. Лакатос придерживался здесь того мнения, что на идеальную строгость может претендовать только формализованное доказательство, содержательные же доказательства всегда остаются нестрогими и не гарантированными от контрпримеров. Он исходит из того, что содержательное доказательство никогда полностью не избавляется от скрытых лемм, которые при дальнейшем анализе могут оказаться ложными или противоречивыми. Другой его довод опирается на понятие *строгости анализа доказательства*. По Лакатосу, мы фиксируем доказательство как строгое, исходя из понятий, в которых мы анализируем доказательство. Понятие строгости доказательства в этом смысле полностью зависит от строгости анализа доказательства и не может выходить за его пределы. Ясно, что углубление анализа доказательства может привести к новым критериям строгости, а отсюда ясно, что доказательство строгое по современным критериям может оказаться не вполне строгим в критериях будущего. Концепция Лакатоса, таким образом, это концепция относительной строгости всякого содержательного математического доказательства.

Эта концепция, будучи довольно убедительной в общих посылках, плохо соответствует фактам истории математики. Верно то, что первые доказательства теорем, как правило, не обладают полной строгостью. Но история математики показывает, что на определенном уровне своего уточнения доказательство начинает рассматриваться как строгое и в дальнейшем уже не корректируется никакими контрпримерами. Если бы Лакатос был прав в своем понимании содержательного доказательства, то мы имели бы непрерывный процесс улучшения уже признанных доказательств и находились бы в постоянном сомнении относительно того, выдержат ли на сегодня принятые доказательства проверку с точки зрения более изощренных критериев строгости, которые могут появиться в будущем. Практика показывает, однако, что ничего подобного не происходит. Математика развивается так, что начиная с определенного уровня строгости, признанное в качестве доказанного, остается таким навсегда.

Мы наметим здесь другую концепцию вызревания математического доказательства, которая больше согласуется с практикой. Мы будем исходить из того, что всякое доказательство разбивается на некоторое множество элементарных шагов, которые должны быть приняты в качестве непосредственно очевидных.

Существует несколько типов очевидностей, которые в принципе могут быть основанием для принятия законности того или иного шага в математическом доказательстве. Можно выделить следующие восемь типов.

1. *Эмпирическая очевидность.* Очевидность опыта иногда имеет место в математическом мышлении, особенно на ранних стадиях развития теории. Математики XVIII-го века думали, что любая непрерывная функция непременно дифференцируема. Это ложное убеждение проистекало из понимания математического анализа как науки, описывающей реальные движения. Если непрерывная функция описывает движение, то она имеет производную, поскольку любое движение имеет скорость. Ясно, что ссылка на опытные основания математических понятий, сколь бы убедительной она ни была, не обеспечивает полной строгости математического рассуждения.

2. *Очевидность аналогии*. Это та очевидность, которая проистекает из перенесения на новый объект свойств известных математических объектов. Аналогия – один из самых обычных и привычных эвристических механизмов развития математики. Во многих случаях первичная аналогия превращается в строгие определения и в новую, более широкую теорию. Однако в общем случае заключения по аналогии не могут считаться надежными и должны пониматься лишь как средства предварительного наведения.

3. *Концептуальная очевидность*. Работая в рамках определенной теории, математик всегда продуцирует внутренний интуитивный фон, вторичную интуицию, подчиненную сложившейся системе понятий. В значительной мере это индивидуальная система образов, позволяющая ориентироваться в сложной системе понятий. Можно сказать, что каждый математик неизбежно обживает ненаглядную теорию посредством привнесенных в нее наглядных образов. Ясно, что такого рода построения, будучи эвристически полезными, не могут претендовать на обосновательную значимость.

4. *Творческая очевидность.* Под этим типом очевидности мы можем понимать иногда встречающиеся акты прозрения, связанные с восприятием некоторого результата как очевидного или несомненного до его строгого обоснования. Ясно, что любая степень очевидности в актах такого прозрения не подменяет самого обоснования и не тождественна доказательству.

5. *Предметная очевидность.* Это очевидность, связанная с мысленными операциями в сфере идеальных предметов, которая лежит в основе математики и позволяет нам с полной определенностью утверждать, что $2 + 2 = 4$, $5 + 7 = 12$ и т. п. Предметная очевидность задает законы операций с идеальными предметами, которые предполагаются в процессе реального

счета и предшествуют ему как устойчивое мысленное представление. Предметная очевидность лежит не только в основе арифметики, но и в основе всех других математических наук. Предметная очевидность является аподиктической в том смысле, что очевидный результат арифметического или знакового рассуждения не может быть поставлен под сомнение каким-либо логическим анализом или контрпримерами.

6. *Геометрическая очевидность*. Это тот вид очевидности, который позволяет нам уверенно утверждать, что две прямые пересекаются в одной точке или что через две точки можно провести только одну прямую. Геометрическая очевидность отличается от арифметической тем, что она непосредственно связана с представлениями о пространстве, которые имеют лишь косвенное значение для арифметики и алгебры. Она имеет дело с предметами, важнейшим качеством которых является их непрерывность.

Геометрическая очевидность, так же как и арифметическая не может быть подвергнута сомнению в своей надежности. Пусть, к примеру, мы доказываем утверждение, состоящее в том, что площадь параллелограмма равна площади прямоугольника с тем же основанием и с той же высотой, посредством мысленного разделения площади параллелограмма на части и составления из этих частей равновеликого прямоугольника. В смысле выявления предпосылок доказательство, конечно, не строго. Но может ли какое-либо более строгое рассуждение в будущем поколебать надежность нашего рассуждения и основанный на нем вывод? Конечно, нет. Мы отклонили бы всякое сколь угодно изощренное рассуждение как софизм, если бы оно не подтверждало наш вывод, проистекающий из наглядных операций с фигурами. В этом смысле геометрическая очевидность совершенно аподиктична, ибо она, как и арифметическая, не может быть отвергнута или скорректирована на основе какого-либо логического анализа.

7. *Очевидность структурного тождества.* Этот вид непосредственной очевидности имеет место в каждом шаге математического рассуждения, где мы подводим некоторую ситуацию под определенное правило. Во всех таких случаях мы прежде всего фиксируем, что общая структура рассматриваемого выражения тождественна структуре (схеме), выраженной правилом. Акт подведения под правило не может быть рационализирован или формализован: он всецело базируется на нашей способности непосредственного отождествления структур на основе аподиктической очевидности. Здесь мы сможем только сказать: «Смотри и убедись, что структура преобразуемой формулы именно та, которая требуется правилом». Этот тип очевидности является, несомненно, первичным, аподиктическим и доказательным.

8. *Логическая очевидность.* Мы обнаруживаем наличие этого вида очевидности прежде всего в непреложности логических норм, определяющих реальное математическое мышление. Студент-математик понимает

доказательство своего преподавателя без какого-либо специального знакомства с логикой. Преподаватель, доказывая теорему и тщательно разъясняя относящиеся к делу понятия, обычно ничего не говорит о правилах логики. Он предполагает (и он не ошибается в этом!), что каждый из его слушателей воспринимает логические переходы как непосредственно очевидные и что они не могут стать предметом дискуссии. Если доказано, что из A следует B, а из B следует C, то никто не будет подвергать сомнению, что из A следует C.

Названные типы очевидностей разбиваются на две группы. Первая группа (первые четыре типа) – это очевидности эвристические, способствующие поиску доказательства, но не определяющие его в логическом отношении. Очевидности второй группы (последние четыре типа), напротив, обладают нормативным характером, они сами по себе определяют умозаключение как единственно возможное и предельно достоверное.

Это разделение позволяет нам представить процесс вызревания содержательных доказательств в другой схеме, существенно отличной от лакатосовской. Мы можем допустить, что в процессе своего вызревания математическое доказательство проходит две стадии, различающиеся качеством интуитивной основы: на начальной стадии своего становления оно прибегает ко всем типам очевидности как к доказательным, на второй же, более зрелой стадии оно использует в качестве доказательных только очевидности аподиктического порядка. Происходит, таким образом, процесс вызревания доказательства, состоящий в постепенном очищении его от очевидностей ассерторических типов. Но в этом случае на второй стадии своего совершенствования доказательство, оставаясь содержательным, уже не будет уязвимым для контрпримеров и вся теория будет иметь статус, близкий к логической завершенности.

Мы должны, таким образом, разделить два этапа в развитии содержательной математической теории: этап слабого развития, когда теория опирается в своих доказательствах на все возможные типы очевидностей, и этап зрелой теории, опирающейся в своих доказательствах только на систему аподиктических очевидностей. Мы можем признать корректируемость математических доказательств на первом этапе развития теории, но исключаем эту ситуацию на зрелой стадии ее развития, а именно на той стадии, когда теория становится свободной от использования эвристических очевидностей в качестве доказательных. Мы утверждаем, таким образом, что содержательная математическая теория за конечное время достигает уровня логического совершенства, на котором она не содержит в себе доказательств, подверженных логической корректировке.

Полное вызревание системы доказательств ведет к тому, что математическая теория, оставаясь содержательной, становится логически жесткой системой в том смысле, что каждая доказательная связь становится строго обусловленной многими другими доказательными связями и существует только в системе этих связей. Доказательство существует здесь в перекрещивающейся сетке строгих доказательств и согласовано с ними. Математическая теория на этом уровне развития становится подобной огромному кроссворду, где каждое слово многократно проверяется через все другие. Разница с обычным кроссвордом состоит лишь в большей жесткости (внутренней детерминированности) математического кроссворда. В обычном кроссворде, чтобы считать слово подходящим, мы должны обеспечить его согласование с другими словами в двух или трех точках. В математической теории каждое доказательство представляет собой слово, которое должно совпадать с существующим массивом слов во всех своих точках, то есть быть истинным во всех своих промежуточных результатах.

Отсюда проистекает и тот вывод, что на зрелой стадии своего развития содержательная математическая теория полностью освобождается от внутренних противоречий и становится идеально обоснованной в этом отношении. Вызревание системы доказательств делает теорию свободной от внутренних противоречий, ибо скрыто противоречивые предпосылки, если бы такие были, не допустили бы построение внутренне согласованного массива слов (доказательств) как логически единой системы.

3. Непротиворечивость центра теории

Разделение центра и периферии в математической теории может быть произведено через сравнение рассматриваемых объектов по их сложности. В процессе развития математической теории ее объекты выстраиваются в жесткую иерархию, которая не зависит от произвола отдельного математика и математического сообщества в целом. Понятие натурального числа является объективно более элементарным, чем понятие действительного числа, а понятие действительного числа – более элементарным, чем понятие функции или интеграла, и это объективное соподчинение не может быть устранено никакими перестройками теории. Математическая теория – это прежде всего иерархия зависимых друг от друга объектов, которая однозначно задана в том смысле, что соподчинение соответствующих понятий не может быть произвольно изменено и молекулярные понятия не могут выполнять функцию атомарных. Для каждой математической теории атомарные понятия выделены объективно, самим ее содержанием, и не могут быть произвольно изменены.

В этом плане мы можем определить и понятие центра теории. К центру математической теории относятся все те ее положения, которые сформулированы на основе исходных, наиболее простых понятий, служащих базой определения для всей последующей совокупности понятий, которые предстоит ввести при систематическом изложении теории. Особое место центральных теорем в математической теории состоит в том, что их принятие однозначно определяет систему аксиом. Мы будем выражать это в том положении, что принятая аксиоматика определена центром теории и непротиворечивость этого центра обуславливает непротиворечивость аксиоматики.

В логическом плане аксиоматика первична. В генетическом плане первичным является генетический центр теории, с которого начинается ее развитие. Это развитие идет в двух направлениях: в сторону усложнения понятий и утверждений и в сторону выявления исходных понятий и утверждений (аксиом). Непротиворечивость аксиоматики генетически обусловлена непротиворечивостью центра теории. Факт непротиворечивости центра теории в развитой теории может быть установлен из логики развития теории, из дедуктивной связи следствий с основаниями.

Как говорит Н. Бурбаки, развитие математической теории подобно развитию большого города: по периферии вырастают отдельные поселки, но постепенно они связываются с центром широкими дорогами и входят, в конце концов, в состав города; сам центр при этом претерпевает перестройку и упорядочение. С логической точки зрения это означает, что всякое приращение содержания математической теории производит проверку ее центральных утверждений, изымая возможные содержательные и логические некорректности. Вследствие этой логики развития цент математической теории является наиболее надежной ее частью. Противоречия появляются обычно на периферии, в сфере неустоявшихся понятий и нестрого доказанных теорем. Присоединение периферии к центру теории, погружение теорем в основное тело теории устраняет противоречия в новых областях и заново проверяет центр теории в его логической корректности.

Итак, мы видим, что в математике работает механизм очистки теории от противоречий и от некорректных определений, обусловленный системностью теории и ее направленностью на решение задач. Этот механизм аналогичен механизму очистки опытных теорий от ложных гипотез, но здесь имеется принципиальное различие. Освобождение эмпирических теорий от некорректных допущений не может быть закончено. Не существует научных принципов или теоретических конструкций, связанных с опытом и экспериментом, в которых мы были бы уверены как в окончательных для какой-то сферы опыта. Если взять математику в целом, то имеет место нечто аналогичное. Математическое мышление в целом, конечно, никогда не будет иметь гарантий от возможности использования некорректных определений, скрытых противоречий и ложных теорем. Но, если мы возьмем конкретную теорию, и в особенности ее генетически первичную центральную часть, то установление полной непротиворечивости – вполне выполнимая задача.

Истинность теории и ее непротиворечивость в некотором смысле равноправные характеристики, ибо оба этих требования к теории являются внешними, проистекающими из практической направленности любого знания. Но гносеологически требование истинности имеет совершенно другой статус, чем требование непротиворечивости. Если полная истинность теории заведомо недостижима, она может быть только идеалом, то полная логическая совместимость утверждений вполне реализуема как в сфере опытного знания, так и в сфере математики. Если я утверждаю, что высота дома 30 метров, а цвет его белый, то очевидно, что это описание абсолютно непротиворечиво. И хотя технически трудно, а во многих случаях и невозможно, доказать непротиворечивость какой-либо достаточно сложной системы утверждений, несомненно, что такие полностью свободные от противоречий системы утверждений реально существуют как в обычном, так и в математическом рассуждении. Другими словами, в отличие от истинности в эмпирических теориях, непротиворечивость в математике (для конкретной математической теории) – отнюдь не идеальная цель, но фактически реализуемое состояние.

Отсюда проистекает принципиальная разница в степени возможной обоснованности эмпирических и математических теорий в процессе их развития. Обоснование опытной теории, как обоснование ее истинности, всегда только относительно, и эта относительность присуща всем ее положениям: мы не можем указать здесь круга принципов, который был бы уже вне критики. Напротив, математическая теория полностью избавляется от противоречий в своей центральной части, приобретая тем самым абсолютно стабильную и неразрушимую основу. Освобождение от противоречий основного ядра теории – совершенно неизбежный результат ее развития. Если некоторая теория как совокупность основных ее теорем и определений и содержит скрыто противоречивые леммы, то она содержит только конечное их число, а это значит, что она, в данном своем фрагменте, через некоторое время будет полностью непротиворечивой.

Движение математической теории к состоянию полной непротиворечивости можно сравнить с движением механической системы к состоянию устойчивости. Если устойчивое положение существует, то система его достигает. Представим себе шарик, брошенный в чашу, имеющую форму полусферы. Через некоторое время он, очевидно, займет единственное и окончательное положение в центре чаши, поскольку фактически максимально устойчивое состояние существует и поскольку все силы в этой системе действуют в направлении этого предела. Ситуация в развивающейся математической теории совершенно аналогична. Те механизмы очистки от некорректностей, которые в эмпирической теории приводят только к увеличению ее относительной адекватности, неизбежно приводят математическую теорию к предельному состоянию, которое характеризуется полной надежностью ее доказательств, корректностью ее определений и полной непротиворечивостью ее логического центра.

Вызревание математической теории – это очищение от противоречий ее центра и отодвигание противоречий к ее периферии. В этом плане процесс становления математической теории можно отождествить с ростом кристалла: молекулы могут двигаться произвольно только на границе роста, но, когда заканчивается формирование данного слоя, всякое произвольное движение здесь исключено, оно запрещено структурой кристаллической решетки. Математическая теория – это понятийный кристалл в мире понятийных систем. В процессе ее формирования в ней допустимы самые различные некорректности, но в сфере сформировавшегося центра это исключено. Этот вывод подтверждается всей историей математики. Хотя, как кажется, мы можем допустить появление теоремы, отвергающей какую-либо известную и признанную теорему (во всяком случае, логического доказательства невозможности у нас нет), но практически этого никогда не случалось и, конечно, никто не верит, что, к примеру, в алгебре можно доказать утверждение, противоречащее основной теореме алгебры или что-то подобное. Все противоречия, которые были в математике до сих пор, – исключительно периферийные противоречия, ни в коей мере не затрагивающие центральных результатов и исходных принципов. Важно понять, что это не случайность, а единственно возможное для математической теории положение, поскольку само ее развитие представляет одновременно и ее обоснование, прежде всего обоснование непротиворечивости ее центрального ядра, расширяющегося в процессе этого развития.

4. Непротиворечивость аксиоматики

Аксиоматика генетически определена центром теории, ибо достаточно признания конечного числа элементарных теорем (определяющего слоя теории), чтобы определить состав полной аксиоматики. Отсюда мы можем заключить о непротиворечивости аксиоматики любой достаточно развитой теории. Ясно, что формирование жестко определенного центра теории в качестве своего прямого следствия ведет к выявлению зрелой и непротиворечивой аксиоматики.

Зрелая аксиоматика обладает *полнотой* в смысле достаточности для систематического развертывания ее содержания теории, *минимальностью* в смысле отсутствия избыточности, а также *элементарностью* в том смысле, что в ней должно быть использовано минимальное число терминов, не относящихся к исходным. Это, конечно, не логические, а только методологические требования. Полнота берется здесь не в смысле доказуемости всех истин, а в смысле практической достаточности аксиом. Методологическая полнота, в отличие от логической, достижима: аксиоматики арифметики и элементарной геометрии обладают методологической полнотой, так как признаны как таковые и не имеют тенденции к расширению. То же самое справедливо и по отношению к двум другим требованиям. Общим методологическим критерием зрелости аксиоматики является ее *стабильность*.

Наш основной тезис состоит в том, что аксиоматика математической теории, достигшая уровня зрелости, является абсолютно непротиворечивой. В обосновании этого положения мы должны исходить прежде всего из логической симметрии между аксиомами и теоремами. В математической теории, в отличие от теории эмпирической, не только теоремы следуют из аксиом, но и аксиомы, при установленной системе исходных терминов, однозначно следуют из теорем. Если мы принимаем теорему Пифагора, то ясно, что мы принимаем аксиому параллельности и т. д. Начиная с некоторой группы признанных отношений (теорем) мы опускаемся до аксиом, которые необходимы для их логического оправдания, а исходя из аксиом, стремимся расширить область теорем. Мы выделяем постепенно центральную группу теорем (*определяющий слой теории*), для оправдания которой необходима полная аксиоматика.

Наличие скрытого противоречия в аксиомах или в самой теории исключается процессом анализа теорем, редукцией их к аксиомам. Скрытое противоречие в теории означает, что в этой теории фактически сосуществуют две аксиоматики: $\Gamma \cup \{a\}$ и $\Gamma \cup \{\neg a\}$, где a – некоторое свойство исходного или элементарного производного объекта. Если это противоречие уже выявлено, то легко показать, что противоречие в аксиомах необходимо отразится существенным разделением теорем уже в пределах определяющего слоя. Для каждого доказательства, в котором используется утверждение a, мы построим параллельное доказательство, в котором a будет заменено на $\neg a$. Возможен случай, когда эта замена ни к чему не приведет и доказательство оборвется, возможен также случай, когда использование $\neg a$ приведет к тому же результату, что и использование a. Но ясно, что этот второй ряд теорем не будет тождественен первому, так как в противном случае логическое оправдание теорем вообще не потребовало бы аксиоматики, отличной от $\Gamma \cup \{a\}$. Наш вывод состоит в том, что независимо от того, отразится ли противоречие в посылках через явное противоречие в теоремах или нет, при наличии двух несовместимых аксиоматик уже в рамках определяющего слоя неизбежно появление теорем, которые относятся к разным логическим системам и которые в редукции к аксиомам выявят несовместимость лежащих в их основе посылок.

То же самое произойдет и в случае скрытой противоречивости посылок. Если мы будем использовать все содержание аксиом, то уже в пределах определяющего слоя теорем мы наметим основание двух систем, и это обстоятельство неизбежно выявится через обратный переход к аксиомам. Если же одна из противоречащих посылок не будет использоваться, то она будет устранена в процессе последующей минимизации логического основания теории. Наш вывод состоит в том, что скрытая противоречивость в посылках неизбежно приведет к логической двойственности теории уже в ее началах и эта двойственность неизбежно будет раскрыта в процессе редукции к аксиомам.

В методологических рассуждениях, относящихся к математике, часто приходится слышать о некоторых глубинных противоречиях, которые могут быть выявлены в неопределенном будущем или даже о бесконечно удаленных противоречиях. Это заблуждение. Удаленных противоречий в математике не существует. Скрытые противоречия в посылках, если таковые есть, обязаны проявить себя уже при анализе теорем определяющего слоя.

Мы исходим здесь из логики вызревания математической теории как системы взаимозависимых понятий. На начальном этапе формирования математической теории, при отсутствии строгой определенности объектов, она может содержать различного рода неясности и противоречия. Однако строгая логическая связь посылок и теорем полностью очищает основание теории еще до появления стабильной аксиоматики. С этой точки зрения, наличие признанной и стабильной аксиоматики у математической теории свидетельствует о ее полной непротиворечивости.

Изложенное позволяет нам утверждать, что современная математика является абсолютно непротиворечивой во всех своих центральных теориях. Абсолютная непротиворечивость таких теорий, как арифметика, геометрия и теория множеств не должна подвергаться сомнению. Не имея логического обоснования непротиворечивости, мы выводим непротиворечивость этих теорий из непосредственно фиксируемого факта стабильности их аксиоматики. То же самое относится и к теории множеств. Современная теория множеств имеет ряд адекватных аксиоматик, наиболее известной из которых является система аксиом Цермело–Френкеля. Изложение теории множеств в рамках этой системы не обнаружило до сих пор никаких противоречий. Но могут ли они появиться в будущем? Поскольку логического доказательства непротиворечивости теории множеств нет, то с логической точки зрения такую возможность нельзя исключить полностью. С системной точки зрения, эти опасения не имеют оснований. Теория множеств в указанной аксиоматике непротиворечива уже в силу возраста этой системы, который позволяет предполагать, что центральное ядро этой теории, определяющее аксиоматику, уже завершило свое формирование и не подлежит изменению. Наблюдаемая стабильность аксиоматики теории множеств лишь отражает этот факт, который говорит также и о непротиворечивости самой аксиоматики. Мы имеем основания утверждать, что закрепление аксиоматики в качестве стабильной свидетельствует о том, что она стала абсолютно непротиворечивой.

Мы фиксируем, таким образом, наличие процесса самообоснования в математической теории, утверждаем, что этот процесс в конечное время доводит теорию до полного логического совершенства и что стабилизация аксиоматики служит достаточным признаком этого совершенства (непротиворечивости аксиоматики).

5. Замечания о методе

Наиболее вероятное возражение против этих доводов будет проистекать из неприятия идеи строгого обоснования на методологическом уровне, то есть вне строгих математических доказательств. Никто не будет возражать против того, что системно-генетическое рассмотрение математической теории является полезным для оправдания нашей веры в непротиворечивость математических теорий, но при этом может появиться сомнение в возможности извлечь из этих соображений строгие выводы, подменяющие результаты логического анализа. Могут ли приведенные доводы быть приняты в качестве доказательных, то есть исключающими возможность противоречий в аксиоматизированных системах, или мы должны их понять как просто доводы за малую вероятность обнаружения противоречий в хорошо аксиоматизированных теориях?

Доказательность системного рассуждения представляется несовместимой с его содержательностью. В настоящее время в философии математики и в методологии науки является почти общим местом утверждение о неоднозначности содержательного (обычного) языка и о невозможности обосновать в его рамках категорические выводы.

Определенный смысл в этих утверждениях есть. Эмпирические, индуктивные тезисы не могут быть основой категорических выводов, и математическое доказательство, в котором обнаруживаются такие допущения, не может считаться корректным. И тем не менее содержательность и категоричность вполне совместимы. Здесь, во-первых, необходимо различить строгость и точность рассуждения. Содержательный язык не строг, ибо в нем отсутствуют однозначные определения понятий и не определена однозначно логика допустимых переходов. Но он вполне может быть точным и однозначным (категоричным) по смыслу своих утверждений: практика приказов и инструкций показывает, что в содержательном языке вполне могут быть сформулированы алгоритмы действий, не допускающие альтернативы. Во-вторых, мы должны учесть то обстоятельство, что содержательные положения, которые мы используем в рассуждениях о математической теории, не имеют характера индуктивных обобщений. Это исключительно положения, проистекающие из общего понимания математики, то есть утверждения, имеющие категорический характер.

Сама практика методологического обоснования математики показывает, что категоричность выводов здесь вполне достижима. Мы, к примеру, можем категорически утверждать, что равенство $2 + 2 = 4$ не может быть опровергнуто в опыте. Основанием этого утверждения, как нетрудно понять, являются не какие-либо формальные выкладки, но общие положения о характере идеализаций, лежащих в основе этого арифметического тождества. Это значит, что мы фактически извлекаем категорические выводы из доводов методологического и содержательного характера.

Формалистская философия математики, родившись в борьбе с некорректным использованием интуитивных представлений в математических доказательствах, в конце концов пришла к полной подозрительности к обычному языку и к умозаключениям, проведенным в рамках обычного языка. В настоящее время мы имеем все основания квалифицировать эту идеологию как ошибочную. Уже в гильбертовской программе обоснования математики, которая по своему происхождению тесно связана с формалистской философией, основная нагрузка возлагается на достоверность рассуждений в метаязыке, которые являются содержательными. Содержательная методология математики не препятствует обоснованию категоричных суждений, полной доказательности выводов.

Мы, конечно, не можем здесь настаивать на безупречности проведенного выше рассуждения о непротиворечивости всех зрелых (стабильных) аксиоматик. Эти рассуждения могут оказаться неполными и ошибочными. Представляется, однако, совершенно несомненным, что адекватное решение вопроса непротиворечивости математики может быть достигнуто лишь в сфере такого рода методологических и содержательных рассуждений, вскрывающих механизм изъятия противоречий из теории в процессе ее развития. Ориентация на чисто логическое рассмотрение проблемы обоснования математики, заданная в начале века, в настоящее время должна быть признана методологически неадекватной. С одной стороны, она определила слишком абстрактный уровень исследования, ни в какой мере не учитывающий реальную динамику математической теории, а с другой стороны, обусловливала решение общей проблемы решением множества логических вопросов, которые в большинстве своем оказались неразрешимыми и не имеющими при более тщательном рассмотрении необходимой связи с общей проблемой. По характеру своего решения проблема обоснования математики как в вопросе надежности доказательств, так и в вопросе о непротиворечивости теорий – именно системно-генетическая проблема, и только на этом этапе рассмотрения она может получить адекватное и исчерпывающее разрешение.

В настоящее время большинство специалистов по философии и методологии математики придерживаются мнения, что в силу второй теоремы Геделя обоснование непротиворечивости достаточно богатых математических теорий в принципе невозможно. Философы эмпирического и прагматического направления утверждают, что оно и не нужно, так как математика в достаточной мере (хотя и не абсолютно) обосновывается уже своими приложениями. Системная методология позволяет дать другую оценку ситуации. С системной точки зрения логическое обоснование непротиворечивости математики действительно не нужно, но не потому, что оно невозможно (теорема Геделя, в действительности, не накладывает здесь полного запрета) и не потому, что мы можем удовольствоваться индуктивной верой в непротиворечивость математических теорий. Ненужность логического доказательства непротиворечивости вытекает из тавтологичности задачи, из того обстоятельства, что математическая теория не может быть противоречивой по самой логике своего развития. Непротиворечивость математической теории – необходимый результат ее становления, естественный способ ее бытия на уровне зрелого состояния. Понимание этого обстоятельства устраняет необходимость в логическом обосновании непротиворечивости для всех математических теорий, достигших стадии стабильной аксиоматики.

А.А. Побережный
(Курск)

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКИ[*]

В статье рассмотрен конструктивистский подход к арифметике: конструктивистская интерпретация основных арифметических понятий, конструктивистские представления об отношении истин и объектов арифметики к действительности.

С середины XIX столетия развитие математики шло под знаком особого внимания к вопросам ее обоснования. При этом исходной базой математических построений оказалось понятие числа. Ряд обобщений этого понятия, вызывавших сомнения методологического характера, допускает строгое логическое обоснование на основании понятия натурального (то есть целого положительного) числа. Начиная с «Арифметических исследований» Гаусса, крупнейшие математики XIX столетия активно разрабатывают теорию числа и предпринимают усилия для того, чтобы положить ее в основу всей математики. Под арифметизацией математики понимают «стремление свести все основные факты той или иной математической науки к числу, в конечном счете, натуральному»[1]. Таким образом, значительная часть математики получила прочное математическое обоснование благодаря тому, что для многих математических теорий существуют арифметические модели.

Математический конструктивизм, представленный в различных формах, в настоящее время прочно занимает свою нишу в общей схеме математической науки. Конструктивные тенденции в математике С.К. Клини просматривает[2], начиная с критики классического анализа Кронекером в 1880-х годах, в работах А. Пуанкаре, Э. Бореля и т.д. Более четкое проявление конструктивных тенденций имеет место в тезисах Л. Брауэра 1907 года, где последний говорит об интуитивном генезисе натурального ряда и настаивает на различии математики и её языка. Л. Брауэр при разработке интуиционистской теории математики основывал свое построение натуральных чисел на концептуальной множественности интервалов времени, которое он рассматривал как первичную интуицию человеческого ума.

В 1930 годах была разработана общая теория конструктивных процессов или алгоритмов для вычисления функций или разрешения предикатов, что положило начало конструктивному направлению в математике, главные положения которого были выдвинуты в 1948—1949 гг. А.А. Марковым. Фор-

[*] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00049а.
[1] Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М., 1965. – С. 35–36.
[2] Клини С.К. Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций. – М.: Наука, 1978. – С. 11–13.

мирование основных понятий этой системы относится к 50-м годам; в это же время были получены и наиболее принципиальные, определившие современный вид теории результаты. Следует прежде всего указать на основополагающий вклад самого А.А. Маркова, а также его учеников Н.А. Шанина, И.Д. Заславского и Г.С. Цейтина. А.А. Марков и советская школа конструктивизма разработали и развили вариант конструктивной математики, последовательно проводящий идею о том, что нет ничего, кроме конструктивных объектов, а алгоритмы отождествляются с их программами. По определению А.А. Маркова, «алгорифм есть предписание, однозначно определяющее ход некоторых конструктивных процессов»[3]. Был введен «принцип Маркова», явно разделивший обоснования и построения. Содержательно принцип Маркова гласит, что для обоснования уже проделанных построений можно пользоваться классической логикой (это показал Н.А. Шанин, построив алгоритм конструктивной расшифровки, разбивающий любую формулу на явное построение и классическое обоснование данного построения).

Вычислительная тенденция в математике вызвала устойчивый интерес к выяснению общей роли алгоритмических процессов, что способствовало развитию конструктивного направления в математике. Данное направление обусловлено конкретными математическими проблемами особого типа, исследование которых представляет интерес как для самой математики так и для ее приложений. Развитие математики выявило необходимость всестороннего исследования различных процессов конструирования и потенциально осуществимых результатов развертывания таких процессов. Именно проблемы этого характера обусловливают содержание и методы конструктивного направления в математике. В настоящее время к математическому конструктивизму относят:

- конструктивную математику А.А. Маркова и Н.А. Шанина;
- интуиционизм (в смысле Л. Брауэра – А. Гейтинга, А. Трулстры);
- конструктивизм в узком смысле (например, Э. Бишопа), который можно описать как интуиционизм без свободно становящихся последовательностей и без тезиса Черча.

Конструктивная математика не разделяет интуиционистское убеждение в первоначальном характере математической интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием практической деятельности человека. Соответственно абстрагирование в конструктивной математике идет не от умственных построений, как в интуиционизме, а от простейших реально наблюдаемых конструктивных процессов. В математическом плане конструктивная математика не принимает выходящую за рамки конструктивных процессов и объектов концепцию свободно становящейся последовательности и основанную на ней интуиционистскую теорию континуума как среды свободного становления. С точки зрения конструктивной

[3] Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгорифмов. – М., 1984. – С. 135.

математики, всякий вычислительный процесс слагается из преобразований групп знаков, выполняемых в соответствии с некоторым алгоритмом.

Рассматривая конструктивистский подход к арифметике, отметим, что различие между интуиционизмом и конструктивизмом состоит, прежде всего, в логических основаниях данных направлений, арифметические системы которых, опираясь на общий тезис, практически совпадают.

В своей работе «О некоторых логических проблемах арифметики» Н.А. Шанин рассматривает как арифметику «учение о целых неотрицательных числах»[4]. В конструктивной математике вводятся в рассмотрение группы знаков разнообразных типов. В одних случаях они являются объектами изучения, в других случаях – техническими средствами, применяемыми для записи алгоритмов, понятий, суждений и т. п. При этом определение групп знаков, относящихся к какому-либо конкретному типу, обычно осуществляется посредством задания тех или иных правил конструирования. Правила конструирования позволяют развертывать процессы построения вводимых в рассмотрение объектов, исходя из некоторых элементарных знаков. Объекты, определяемые этим методом, характеризуются как результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на заданных правилах конструирования.

Конструктивно определяемыми объектами являются, например, целые неотрицательные (натуральные) числа, характеризуемые как группы некоторых элементарных знаков, строящиеся на основании определенных правил. Такого же рода объектами являются отрицательные целые числа, дроби, полиномы с целыми или дробными коэффициентами, матрицы с целыми или дробными элементами, схемы рекурсивных функций и нормальных алгорифмов, конструктивные действительные числа (определяемые при помощи схем рекурсивных функций или схем нормальных алгорифмов), полиномы с конструктивными действительными коэффициентами, матрицы с конструктивными элементами, формулы различных логико-математических и логических исчислений и т. п.

При разработке символики в конструктивной математической теории некоторые знаки определяются как элементарные. Задается список образцов элементарных знаков, каждый из которых по форме отчетливо отличается от всех остальных. Эти знаки рассматриваются как объекты, не имеющие частей. Два элементарных знака считаются *одинаковыми,* если они одинаковы с одним и тем же стандартным знаком, и считаются *различными,* если соответствующие им стандартные знаки не совпадают. Рассматриваемый конкретный знак считается элементарным знаком, одинаковым с таким-то стандартным знаком, если он графически подобен указанному стандартному знаку. Элементарные знаки составляют графическую основу для построения групп знаков различных специальных типов. Натуральное

---

[4] Шанин Н.А. О некоторых логических проблемах арифметики // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – Т. XLIII. – М., 1955.

число в конструктивной математике – это слово в алфавите, то есть ряд вертикальных штрихов «|». На любом шаге построения можно остановиться, чтобы исследовать, обладает ли полученное число некоторым определенным свойством. При этом конструктивность как методологический принцип строго определяет реальную совокупность данных, какие можно получить путем осязаемых действий.

При использовании методов индукции и рекурсии построение арифметики натуральных чисел не вызывает трудностей, равно как построение арифметики целых и рациональных чисел. Следует признать, что основные понятия арифметики несколько усложняются. При построении систематически проводится знаковый подход – натуральные, целые и рациональные числа определяются как знаковые комплексы (слова) определенных типов. В восприятии любого предмета субъект представляет его себе как сущность, отвлекаясь от его частных свойств. Обнаруживается также возможность неограниченного повторения этой сущности. Отсюда исходит понятие натурального числа. Причем с самого начала это понятие выступает в облачении определенных свойств, которые в классической математике описываются при помощи аксиом Пеано.

А. Гейтинг описывает схему построения натурального числа в своей работе «Интуиционизм» следующим образом: «Построение натурального числа n состоит в последовательном построении некоторых натуральных чисел, называемых числами, от 1 до n, символически: $1 \to n$. На любом шаге построения мы можем остановиться, чтобы исследовать, обладает ли полученное на этом шаге число некоторым определенным свойством. Например, мы можем определить, встречается ли данное число m, отличное от n, в ряду $1 \to n$. Если встречается, то мы говорим, что $m < n$, если не встречается, то мы говорим, что $m > n$. Далее имеет место теорема: «если $m \neq n$ и $m > n$, то $n < m$. Ибо если m не встречается в $1 \to n$, это значит, что в тот момент, когда мы завершаем построение n, построение m еще не закончено; поэтому n встречается в $1 \to m$.

Теорема полной индукции допускает доказательство того же рода»[5].

Построение системы конструктивных действительных чисел предлагается в работе Б.А. Кушнера «Лекции по конструктивному математическому анализу»[6].

Натуральными числами являются слова в алфавите Ч, которые могут быть получены с помощью следующих порождающих правил:

1) слово 0 есть натуральное число;
2) если слово P в алфавите Ч – натуральное число, то слово P|, получаемое приписыванием к P буквы «|», также есть натуральное число.

Для обозначения конкретных натуральных чисел может использоваться обычная десятичная символика, так что слова 0|, 0||, 0||| ... будут обозначаться посредством 1, 2, 3...

[5] Гейтинг А. Интуиционизм. – М., 1965. – С. 23.
[6] Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. – 448 с.

Слово Р∈Ч называется **целым** числом, если Р является натуральным числом или имеет вид Р = – n, где n – натуральное число, отличное от 0.

Целое число называют неотрицательным (отрицательным), если оно является (не является) натуральным числом.

Слово Q в алфавите Ч называется **рациональным** числом, если Q является целым числом или Q = p_1/p_2, где p_1 и p_2 – целые числа, причем $p_2 \neq 0$.

Арифметические операции над рациональными числами сохраняют равенство рациональных чисел. Операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Выполняются также распределительные законы для умножения относительно сложения и вычитания.

Таким образом, первоначальные математические структуры – натуральные, целые и рациональные числа – непосредственно могут трактоваться как слова некоторых простых типов в фиксированном алфавите, при этом соответствующие отношения равенства и порядка легко сводятся к графическому совпадению и различию слов[7]. Введение более сложных структур – действительных чисел, функций над ними и т. д. – осуществляется в конструктивной математике на основе понятия алгоритма, играющего в ней примерно такую же роль, какую играет в традиционной математике понятие функции. Конструктивные действительные числа представляют собой пары записей алгоритмов, из которых первый алгоритм определяет последовательность рациональных чисел, а второй эффективно оценивает скорость ее сходимости. Это определение эквивалентно второму определению вычислимого действительного числа, данному Тьюрингом. Для конструктивных действительных чисел естественным образом определяются отношения равенства и порядка и арифметические операции, причем последние задаются алгоритмами.

Конструктивная математика, стандартизируя используемые алгоритмы посредством принятия одного из современных точных определений этого понятия вместе с соответствующей гипотезой типа тезиса Черча, принципа нормализации и т.д., утверждающей совпадение оперативных возможностей, доставляемых алгоритмами в интуитивном и точном смысле слова. Наибольшее применение в конструктивной математике получили нормальные алгорифмы Маркова[8].

Математические исследования конструктивно определяемых объектов могут осуществляться при помощи понятий и методов теории множеств и, следовательно, на основе абстракций, характерных для теоретико-множественного направления в математике. В связи с этим необходимо отметить, что при применении для конструктивно определяемых объектов систе-

[7] См. Марков А.А. О конструктивной математике // Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – М.: Изд. АН СССР, 1962. – С. 8–14.

[8] См. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгорифмов. – М., 1984.

мы абстракций, характерной для теоретико-множественного подхода, упускается из поля зрения то, что конструктивно определяемые объекты не заданы все сразу в совокупности.

Понятие множества в конструктивной математике играет чисто техническую роль, то есть имеет место лишь удобный вариант терминологии. Термины «множество» и «свойство» считаются синонимами; задание множества конструктивных объектов какого-то типа заключается в формулировании свойства объектов этого типа, а принадлежность конструктивного объекта множеству просто означает, что этот объект обладает соответствующим свойством. Такая трактовка вовсе не связывает с множествами идею о совокупностях одновременно существующих предметов[9], поскольку сами множества оказываются конструктивными объектами (словами в некотором алфавите) и, в частности, могут выступать в качестве исходных данных алгоритмов. Таким образом, в конструктивной математике, по существу, нет единого понятия множества – объем этого понятия зависит от выбираемого языка и может меняться от случая к случаю.

Равенство множеств понимается как эквивалентность соответствующих свойств. Определение операций над множествами обычным образом сводится к использованию логических связок (конъюнкция для пересечения, дизъюнкция для объединения и отрицание для дополнения). При этом конструктивная трактовка суждений приводит в некоторых случаях к новым свойствам операций: двойное дополнение множества не обязательно равно ему самому.

Важную роль в конструктивной арифметике играют конструктивные принципы истолкования логико-арифметических формул, выражающие особое конструктивное понимание логических связей при образовании арифметических суждений. В результате применения к задачам допустимых методов комбинирования возникают новые задачи. А.Н. Колмогоров характеризует посредством специальных символических выражений определенные типы задач и для задач рассматриваемых им типов дает конструктивное истолкование понятия «решение задачи». На основе этого истолкования он разрабатывает особое исчисление задач, обладающее следующим свойством: каждое символическое выражение, получающееся при развертывании исчисления задач, выражает некоторый тип задач, допускающих конструктивное решение. Возможность осуществить необходимые уточнения появилась тогда, когда в достаточной степени продвинулась разработка теории рекурсивных функций и алгорифмов.

В 1960-е гг. с оригинальной и чрезвычайно далеко продвинутой системой конструктивной математики выступил известный американский математик Э. Бишоп[10]. Как отмечает Б.А. Кушнер, конструктивизм Э. Бишопа «занимает промежуточное положение между интуиционистским анализом и системами,

---

[9] Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. – М.: Мир, 1965. – С. 49.
[10] Bishop E. Foundations of Constructive Analysis – New York, 1967.

использующими точные понятия алгорифма»[11]. Солидаризируясь с интуиционистской критикой теоретико-множественной математики, Бишоп вместе с тем стремится избежать того, что он называет «озабоченностью философскими проблемами конструктивизма за счет конкретной математической активности»[12]. Им отвергаются как интуиционистские теоремы типа брауэровской теоремы о веере, влекущей равномерную непрерывность интуиционистских действительных функций, так и претензии точных концепций алгорифмов на полное выражение сущности вычислимого (тезисы Черча, Тьюринга, принцип нормализации). И то и другое содержит сверхматематические, а потому неприемлемые предположения. Бишоп развертывает свой конструктивный анализ, доводя изложение до глубоких результатов, относящихся к теории функций комплексной переменной и функциональному анализу, на основе интуитивной концепции конструктивности, предполагающей, в частности, первоначальную интуицию натуральных чисел и их арифметики и тот взгляд, что любое математическое утверждение должно, в конечном счете, выражать некоторый факт вычислительного характера о натуральных числах (те или иные вычисления над натуральными числами дают тот или иной результат). К преимуществам таких исследований относится и большая точность в постановке задач, и возможность доказательства неразрешимости многих естественных алгоритмических проблем, и, наконец, возможность изучения специфических свойств вычислимых в точном смысле объектов. Интерес получаемых здесь результатов очевиден, поскольку даже те немногочисленные математики, которые, подобно Бишопу, отвергают абсолютистские притязания точных концепций алгоритма, по-видимому, признают их очень большую общность. По мнению Б.А Кушнера, «представляется весьма правдоподобным, что большинство результатов Бишопа может быть истолковано и в рамках систем анализа, опирающихся на точное понятие алгорифма»[13].

Рассмотрение онтологической сущности арифметических объектов в конструктивизме приводит к выводу, что конструктивная концепция математики является субъективистской и согласно ей содержание математики создается мышлением субъекта. «Интуиционистская философия математики, в отличие от логицистской, последовательно антиреалистична. Математические объекты понимаются здесь лишь как мысленные конструкции, не имеющие какого-либо существования, независимого от конструктивной деятельности сознания. Брауэр считает, что законы математики не имеют статуса законов физики, ибо если бы человечество было вдруг уничтожено, то в мире не осталось бы никакой реальности, представляющей математические теоремы, в то время как физические законы как объективные связи продолжали бы существовать. Математическое творчество, с

[11] Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. – С. 24
[12] Там же.
[13] Там же. – С. 25

этой точки зрения только изобретение, но никоим образом не открытие и не отражение какой-либо реальности»[14].

Математика, по мнению Брауэра, есть не теория, а некоторая весьма существенная часть человеческой деятельности, метод обращения с человеческим опытом, состоящий прежде всего в том, что основное внимание сосредоточивается на каком-то одном из наших восприятий и на различении этого восприятия от всех остальных[15]. Поскольку акты выделения отдельных восприятий приводят к изначальной интуиции целых чисел, Брауэр связывает совокупность восприятий (из которых выбирается какое-то одно) с понятиями непрерывности и времени; по этой причине обоим этим понятиям также приписывается изначальный характер. Допуская возможность создания математических понятий мышлением субъекта, интуиционисты, на первый взгляд, оправдывают их существование в математике, но не объясняют, как чисто субъективные создания мысли оказываются применимыми для познания реальной действительности. Математические объекты, с точки зрения интуиционистов, существуют лишь тогда, когда их можно сконструировать. Более адекватно объясняют процесс создания таких далеких от эмпирической действительности понятий, как «бесконечность», сторонники конструктивного направления. Марков показывает, что подобные понятия создаются с помощью абстракции потенциальной осуществимости построения математических объектов: «Абстракция потенциальной осуществимости позволяет нам рассуждать о сколь угодно длинных конструктивных процессах и сколь угодно больших конструктивных объектах. Их осуществимость потенциальная: они были бы осуществимы практически, располагай мы достаточным пространством, временем и материалом»[16]. На основе этой абстракции возникает понятие «потенциальная бесконечность», которое интуиционисты и конструктивисты противопоставляют понятию «актуальная бесконечность» сторонников платонизма и математического реализма, оказывающемуся источником возникновения парадоксов в канторовской теории множеств.

Онтологический статус математического объекта – одна из старейших проблем философии математики. Ни в философии прошлого, ни в современной философии математики не получено ее общепринятое решение. Не решен вопрос о способе бытия математических объектов – о том, где и как существуют математические знаки, что они обозначают. Математические объекты, представляя наиболее строгую науку, сами выглядят как нечто, существенно отличное от вещей материального мира.

Конструктивная математика – математика, строящаяся в соответствии с тем или иным конструктивным мировоззрением, связывающая утверждения о существовании математических объектов с возможностью их построения. В

---

[14] Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – С. 184–185.
[15] См.: Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. – М., 1969. – С. 246 – 248.
[16] Марков А.А. Конструктивная математика // Математический энциклопедический словарь. – М., 1983.

эпистемологии и философии науки XX века конструктивистские направления завоевывали влияние в противовес эмпиристским традициям, ориентированным на естествознание XIX века, и формалистской математике.

Конструктивный объект – логико-гносеологическая категория, обозначающая объекты, возникающие в результате развертывания порождающих их конструктивных процессов. Рассматриваемые безотносительно к смыслу, который им впоследствии может быть придан, а также к их предполагаемому использованию, конструктивные объекты представляют собой некоторые специальным образом устроенные конфигурации элементарных знаков, и как таковые они должны восприниматься чисто синтаксически. Такого рода знаково-структурный подход к объектам впервые возник в математических исследованиях в начале XX в. и затем получил последовательное развитие в работах по математической логике и теории алгоритмов. Впоследствии на базе этих исследований сформировалась специальная наука о знаковых системах – семиотика. Как правило, конструктивные объекты вводятся в рассмотрение путем задания соответствующих семейств порождающих их однотипных конструктивных процессов. В тех случаях, когда описаниям этих процессов удается придать точный характер, характеризации соответствующих им типов конструктивных объектов также оказываются точными, и тогда объекты этих точно описанных типов могут быть использованы в качестве моделей фундаментальных понятий самых разнообразных научных дисциплин. В виде конструктивных объектов могут быть заданы и алгоритмы точно охарактеризованных типов (например, машины Тьюринга или нормальные алгорифмы Маркова), и тем самым открывается путь к построению на базе конструктивных объектов достаточно богатых и содержательных математических теорий. Аналогично, как конструктивные объекты соответствующих типов, могут быть определены структурные химические формулы, релейно-контактные схемы, тексты на разного рода искусственных языках (на алгоритмических языках, на языках каких-либо дедуктивных теорий) и т. п. Фактически можно считать, что любая научная символика допускает задание в виде конструктивных объектов надлежащих типов. Таким образом, понятие «конструктивный объект» обладает чрезвычайно высокой степенью общности. Относительно низкий уровень абстрактности и особая «осязаемость» конструктивных объектов делают более простой проблему понимания суждений об этих объектах (например, математических), и это обстоятельство в сочетании с высокой выразительной силой превращает конструктивные объекты в важнейший инструмент научного исследования. Немаловажным является и тот факт, что в силу их знаковой природы конструктивные объекты могут служить информацией, пригодной для непосредственного сообщения ее вычислительной машине. Рассмотрение конструктивных объектов и вовлечение их в процесс научного исследования может быть осуществлено с привлечением абстракций различных уровней. Наиболее естественным представляется рассмотрение их на базе одной лишь абстракции потенциальной осуществимости, учитывающее характер возникновения конструктивных объектов. При этом в качестве логической базы естественно взять так называемую конструктивную логику, специально учитывающую специфику понимания суждений о существовании конструктивных объектов как суждений об их потенциальной осуществимости. При рассмотрении конструктивных объектов, ведущемся на базе абстракции актуальной бесконечности, они трактуются совместно и равноправно с объектами теоретико-множественного характера, а основой логической дедукции является при этом так называемая классическая (аристотелевская) логика. Этим в значительной степени игнорируется генезис конструктивных объектов.

П. Мартин-Леф[17] разработал собственную систему, воспользовавшись наблюдением Клини, что фиксация алгоритмических функций еще не означает фиксации алгоритмов преобразования функций. Объекты нижнего уровня у него алгоритмы, а высших – строятся по Бишопу. Конструктивная математика, по Мартин-Лефу, изложена достаточно строго и включила многие преимущества не формализованного изложения Бишопа. Свойства функций, по Бишопу и Мартин-Лефу, оказались значительно ближе к классическим, расходясь с ними лишь в тех случаях, когда классические теоремы существования не дают и не могут дать никакого алгоритмического построения. Мартин-Леф считает несущественным, предпочитаем ли мы «считать конструктивные объекты мысленными конструкциями или материально существующими объектами. Следует, однако, заметить, что в последнем случае мы позволяем себе оперировать с этими объектами таким образом, как будто не существует никаких ограничений в пространстве и во времени. Например, если наши конструкции — это отметки чернилами на листе бумаги, то мы предполагаем, что запас чернил и бумаги не ограничен. Эта абстракция позволяет нам, в частности, сложить любые два натуральных числа, приписав одно к другому. Бесконечное появляется здесь лишь потенциально, не приводя, по-видимому, ни к одной из трудностей, порождаемых классическим понятием актуальной бесконечности»[18].

«Важность конструктивных объектов определяется тем фактом, что это единственные объекты, которые мы можем сообщить друг другу во всех деталях. В частности, если нужна уверенность, что два математика, рассматривающие некоторый математический объект, имеют в виду один и тот же объект, то этот объект должен быть конструктивно определен. В соответствии с этим все конкретные математические объекты, которые мы будем рассматривать, такие, как вещественные числа, открытые множества, вещественнозначные функции вещественной переменной, ординальные числа, измеримые множества и т. д., будут конструктивными объектами, то есть, в конечном счете, натуральными числами»[19].

[17] Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. – М.: Мир, 1975.
[18] Там же. – С.10.
[19] Там же. – С.11.

Конструктивное направление в математике оформилось после возникновения точного понятия алгоритма: алгоритмический подход является одной из главных черт, отличающих конструктивизм от интуиционизма. Для развития данного подхода решающую роль сыграло обнаружение неразрешимых массовых проблем, относящихся к бесконечному классу индивидуальных задач, различающихся значениями некоторого параметра, который входит в условие, определяющее данную массовую проблему. Массовая проблема разрешима (алгоритмически разрешима), если алгоритм решения проблемы существует, и неразрешима в противном случае; массовая проблема поэтому называется также алгоритмической проблемой. В статье Б.В. и Л.Г. Бирюковых «”Учение о формах (величинах)” Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике»[20] прослеживается генезис соответствующих разработок с генетически-конструктивистской установкой в математическом мышлении того времени. По мнению авторов статьи, «такая постановка вопроса естественным образом приводит нас к фигурам Германа и Роберта Грассманов»[21].

В «Очерке общего учения о формах» Грассман выдвигает идею генетического построения математики. Переход к рассмотрению способа порождения величин (форм) для него означает выход за рамки общего учения о формах, переход к реальным операциям, то есть операциям над величинами, способ порождения которых задан. Одним из способов перехода к реальным операциям может быть способ, который он впоследствии применил к арифметике. Г. Грассман понимал математику как науку об умственных построениях – построениях, находящихся в определенных отношениях к реальности; связи математики с прикладными областями, согласно его взгляду, осуществляются через науки, основанные на «исходном созерцании» пространства и времени[22]. Последующее рассмотрение способов умственного построения приводит его к понятиям непрерывной и дискретной форм. По мнению авторов, «в трудах создателя «учения о протяженностях» нашли одну из первых формулировок те «модельные объекты» алгебры, которые в XX в. сыграли такую важную роль в разработке проблематики алгоритмической разрешимости – неразрешимости, а также, – добавим мы теперь, – и в развитии математико-логической теории моделей, тесно связанной как с «классическими», так и «неклассическими» (интуиционистскими и конструктивистскими) построениями в логике и основаниях математики»[23].

---

[20] Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г. «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. X. // Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. – М., 1982.

[21] Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г. Алгоритмические проблемы XX в. в становлении аксиоматики фундаментальных алгебраических структур: вклад Германа и Роберта Грассманов // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 167.

[22] Там же. – С. 169.

[23] Там же.

Построения Германа Грассмана явились первым шагом к построению системы аксиом, лежащих в основе понятия натурального числа.

«В изданном им совместно с братом Робертом в 1861 году учебнике арифметики содержатся определения основных операций, достаточные для дальнейших формальных построений, устанавливающих основные законы арифметических действий. В системе аксиом Грассмана понятие натурального числа отражено, однако, лишь в наиболее абстрактном аспекте порядкового числа, в котором система натуральных чисел рассматривается лишь с точки зрения взаимного расположения их в натуральной последовательности 1, 2, 3, 4...»[24].

Аксиоматика Грассмана была завершена работами Пеано, в которых была разработана система аксиом арифметики натуральных чисел через основные понятия. Конструктивное понятие натурального числа вводится через построение, но оно с самого начала обладает всеми теми свойствами, которые в классической математике описываются при помощи аксиом Пеано.

[24] Арнольд А. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – С. 10.

Проблемы онто-гносеологического обоснования
математических и естественных наук

СБОРНИК СТАТЕЙ

Выпуск 2

Научное издание

Редактор И.Н. Никитина
Компьютерная верстка А.С. Левченко, Д.И. Алябьев

Лицензия ИД № 06248 от 12.11.2001

Подписано в печать 16.06.2009 г.
Формат 60х84/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Уч.-изд. л. 10 Усл. печ. л. 10,2
Заказ ____ Тираж 100 экз.

Издательство Курского госуниверситета
305000, г. Курск, ул. Радищева, 33

Отпечатано в лаборатории информационно-методического обеспечения
Курского государственного университета